

T H E S E S

présentées à la

FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE NANCY

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES PHYSIQUES

par

MANUEL DA SILVA GARRIDO

-*-*-

PREMIERE THESE : CONTRIBUTION A LA THECRIE DYNAMIQUE DES
SYSTEMES ELECTROMECANQUES.

DEUXIEME THESE : CONTROLE PAR COMPENSATION

-*-*-

Soutenues le 1968 devant la commission d'Examen

Président : M. R. GUILLIEN

Examineurs: MM. J. GOSSE

E. GUDEFIN

Invité : M. R. BONNEFILLE



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555023_0021

ANNEE SCOLAIRE 1967-1968

Doyen : M. AUBRY

Assesseur: M. GAY

Doyens honoraires : MM. CORNUBERT - DELSARTE - ROUBAULT

Professeurs honoraires : MM. RAYBAUD - LAFFITTE - LERAY - JULY -
LAPORTE - EICHHORN - GODEMENT - DUBREUIL - L. SCHWARTZ -
DIEUDONNE - DE MALLEMANN - LONGCHAMBON - LETORT - DODE -
GAUTHIER - GOUDET - OLMER - CORNUBERT - CHAPELLE - GUERIN -
WAHL.

Maîtres de conférences honoraires : MM. LIENHART - PIERRET

Professeurs

MM. DELSARTE	Analyse Supérieure
ROUBAULT	Géologie
CAPELLE	Mécanique rationnelle
VEILLET	Biologie animale
BARRIOL	Chimie théorique
BIZETTE	Physique
GUILLIEN	Electronique
GIBERT	Chimie physique
LEGRAS	Mécanique rationnelle
BOLFA	Minéralogie
NICLAUSE	Chimie
FAIVRE	Physique appliquée
AUBRY	Chimie minérale
COPPENS	Radiogéologie
DUVAL	Chimie
FRUHLING	Physique
HILLY	Géologie
LE GOFF	Génie Chimique
SUHNER	Physique expérimentale
CHAPON	Chimie biologique
HEROLD	Chimie minérale industrielle
SCHWARTZ B.	Exploitation minière
*MALAPRADE	Chimie
MANGENOT	Botanique
GAYET	Physiologie
HADNI	Physique
*BASTICK	Chimie



MM.	DUCHAUFOR	Pédologie
	GARNIER	Agronomie
	NEEL	Chimie organique industrielle
	BERNARD	Géologie appliquée
	*CHAMPIER	Physique
	*GAY	Chimie biologique
	STEPHAN	Zoologie
	*CONDE	Zoologie
	*WERNER	Botanique
	EYMARD	Calcul différentiel et intégral
	LEVISALLES	Chimie organique
Mme	HERVE	Méthodes mathématiques de la physique
MM.	FELDEN	Physique
	*GOSSE	Mécanique physique
	*DAVOINE	Physique (E. N. S. M. I. M.)
	HORN	Physique 1er cycle
	*ROCCI	Géologie
Mme	LUMER	Mathématiques
	N.....	Chimie biologique
	N.....	Mécanique appliquée
* Professeur titulaire à titre personnel		

Maîtres de Conférences

Mme	BASTICK	Chimie P. C. Epinal
MM.	GUDEFIN	Physique
	VUILLAUME	Psychophysiologie
	FRENTZ	Biologie animale
	MARI	Chimie (I. S. I. N.)
	AUROUZE	Géologie
	DEVIOT	Physique du solide
	FLECHON	Physique P. C.
Mlle	HUET	Mathématiques C. B. G.
	VIGNES	Métallurgie
	BALESDENT	Thermody. chimique appliquée(ENSIC)
	BLAZY	Minéralogie appliquée (ENSG)
	JANOT	Physique P. C. Epinal
	JACQUIN	Pédologie et chimie agricoles
	MAINARD	Physique P. C.
	CACHAN	Entomologie appliquée (ENSA)
	MARTIN	Chimie P. C.
	PAULMIER	Mécanique expérimentale (ENSEM)
	PROTAS	Minéralogie
	JOZEFOWICZ	Physico-chimie
	JURAIN	Géologie C. B. G.
	RIVAIL	Génie chimique

MM.	VILLERMAUX	Génie chimique
	METCHE	Biochimie appliquée (brasserie)
	PAIR	Mathématiques appliquées
	BAUMANN	Physique 1er cycle
	DURAND	Physique
	GRANGE	Physique (ISIN)

N.....	Mécanique des fluides (ISIN)
N.....	Mécanique (ISIN)
N.....	Probabilités et statistiques
N.....	Mathématiques
N.....	Mathématiques P. C.
N.....	Mathématiques C. B. G.
N.....	Physiologie animale
N.....	Mathématiques M. P.
N.....	Exploitation minière (ENSMIM)

AVANT - PROPOS

Ce travail a été réalisé au "Laboratoire d'Electrotechnique" de l'Ecole Nationale Supérieure d'Electricité et de Mécanique de Nancy.

J'exprime ma profonde gratitude à Monsieur le Professeur Edmond GUDEFIN qui, constamment et avec compétence, m'a soutenu et éclairé au cours de ce travail.

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur Robert GUILLIEN qui a bien voulu accepter la présidence du jury d'examen, ainsi que Monsieur le Professeur Jean GOSSE qui me fait l'honneur d'y participer.

Je remercie Monsieur le Professeur Robert BONNEFILLE de la Faculté des Sciences de Paris, pour l'intérêt qu'il a manifesté à mes recherches et pour avoir accepté de faire partie du jury.

Je remercie Monsieur le Professeur António CARRISSO, de l'Université de Lisbonne, qui m'a initié à la recherche, et l'Instituto de Alta Cultura, de Lisbonne qui m'a assuré les conditions matérielles pour effectuer mes travaux.

Enfin je remercie tous mes collègues de Laboratoire pour leur esprit de camaraderie ainsi que Madame BIGEARD pour sa compétence et son efficacité dans la dactylographie de ce mémoire.

o

o

o

- TABLE DES MATIERES -

INTRODUCTION	1
PARTIE I : ANALOGIE STRUCTURELLE ELECTROMECHANIQUE.....	5
1. Introduction	6
2. Lois fondamentales	7
3. Equations de Lagrange	11
4. Principe d'Hamilton	17
5. Dualité	20
 PARTIE II : ETUDE DES SYSTEMES ELECTROMECHANQUES.....	22
1. Introduction	23
2. Techniques analytiques	26
3. Liaisons électromécaniques	33
3.1 - Eléments à couplage magnétique	33
3.2 - Eléments à couplage électrostatique	62
3.3 - Equations générales	69
3.4 - Dualité	74
4. Liaisons électriques, mécaniques et d'asservissement	78
 PARTIE III : APPLICATIONS.....	82
1. Analyse matricielle des machines électriques	83
2. Transformation de réseaux	96
3. Asservissement du facteur de puissance d'un moteur synchrone	99
 CONCLUSION.....	104
BIBLIOGRAPHIE	106

INTRODUCTION

L'étude des systèmes électromécaniques à partir de la théorie du champ électromagnétique est fondamentale pour connaître le comportement local des systèmes, important d'un point de vue constructif.

Une fois ces problèmes résolus, on s'intéresse plutôt au contrôle de l'énergie électromécanique convertie qu'au processus intime de conversion. Pour cela, on traite les systèmes électromécaniques du point de vue global dans le cadre des approximations de l'état quasi-stationnaire.

La théorie classique des circuits électriques ne permet pas toujours de saisir certains aspects importants du comportement des systèmes.

Ces limitations se manifestent principalement lorsque les systèmes sont pourvus de connexions complexes, capables par leur action de modifier profondément les aspects énergétiques du système.

Un exemple important est celui des machines à commutation. La théorie des circuits tout à fait capable de justifier les propriétés de ces machines, n'en a pas proposé une interprétation globale satisfaisante.

Or les systèmes électromécaniques avec connexions complexes deviennent aujourd'hui particulièrement importants, grâce aux progrès des éléments semiconducteurs de puissance. D'autre part, les réseaux électromécaniques posent aussi des problèmes d'analyse difficiles, où les techniques classiques se révèlent parfois peu commodes. Ainsi, a-t-on été amené à introduire une formulation de l'électromécanique qui a ses sources dans la dynamique analytique.

La définition d'un modèle dynamique des systèmes électromécaniques remonte à Maxwell [1], qui l'a proposé pour certains systèmes linéaires, dont le comportement peut être décrit par les équations de Lagrange. Une généralisation aux systèmes non-linéaires a été obtenue par Poincaré [2], et un modèle dynamique dual de celui de Maxwell a été proposé par Darrieus [3].

Pourtant, les modèles dynamiques de Maxwell et de Darrieus ne sont pas applicables à certains systèmes électromécaniques inductifs et électrostatiques, notamment ceux avec contacts glissants.

De très nombreuses études ont été faites à propos du modèle de Maxwell et des circuits inductifs à contacts glissants et à commutation.

Ses travaux sur l'induction unipolaire et sur les machines à commutation ont conduit Poincaré [4] à considérer les circuits à contacts glissants et à commutation comme formés de circuits à résistances variables, auxquels le modèle de Maxwell resterait applicable [5] .

Nous avons pu montrer que ce point de vue peut être utilisé pour établir des équations générales des circuits à commutation [6] [7] . Dans le présent travail nous montrerons qu'il peut aussi servir à étudier les circuits à contacts glissants.

On établit d'abord des équations internes du système et on effectue ensuite le passage à des équations globales reliant les variables externes.

Ce passage des variables internes aux variables externes modifie les équations de fonctionnement qui ne découlent plus du modèle de Maxwell.

Les travaux les plus importants essayant de définir un modèle pour les circuits à contacts glissants sont dus à Kron [8] qui propose de développer le modèle de Maxwell au moyen de la géométrie. Pourtant, le modèle géométrique de Kron présente certaines limitations et ce ne fut que très récemment qu'un modèle géométrique applicable à tous les circuits à contacts glissants a été obtenu par Von der Embse [9] .

Les premières tentatives pour définir un nouveau modèle dynamique, plus général que celui de Maxwell et directement applicable aux circuits à contacts glissants, remontent à Carvallo [10] . Celui-ci propose de considérer les circuits à contacts glissants comme des systèmes dynamiques non holonomes, idée reprise plus tard par Appell [11] .

Par suite de l'inexistence de condition de liaison entre les variables externes classiques d'un circuit à contacts glissants, ce point de vue n'a pas pu être développé.

Nous avons introduit de nouvelles variables dynamiques et, utilisant le concept de liaisons d'asservissement de Béghin [12] , plus général que celui de liaisons non holonomes, nous avons proposé un modèle dynamique qui contient comme cas particulier celui de Maxwell et qui est applicable aux circuits à contacts glissants [13] [14] .

Nous avons encore rapproché les points de vue de Poincaré et de Carvallo, en montrant comment les liaisons internes engendrent le passage du modèle dynamique de Maxwell au nouveau modèle [15] . Cette analyse pourra devenir particulièrement utile pour l'étude des circuits à commutation électronique modernes.

Dans le présent travail, nous analyserons en détail le modèle dynamique que nous avons proposé et nous effectuerons sa généralisation aux systèmes électrostatiques à contacts glissants.

Nous définirons un modèle dynamique dual, applicable aux systèmes à contacts glissants qui constitue une généralisation du modèle de Darrieus.

Ces résultats seront intégrés dans une théorie dynamique des réseaux électromécaniques avec des liaisons mécaniques, électriques et d'asservissement.

La PARTIE I de notre exposé sera consacrée à une révision sommaire des concepts fondamentaux permettant l'application de la dynamique analytique à l'électromécanique.

Dans la PARTIE II nous exposerons les aspects théoriques de notre travail et les résultats obtenus seront confirmés à partir de l'électromagnétique.

Dans la PARTIE III nous établissons d'abord les équations générales matricielles des machines électriques ; puis nous montrons que la méthode des réseaux primitifs de Kron peut s'appliquer à des systèmes avec des éléments à contacts glissants ; enfin nous utiliserons le concept de liaison d'asservissement pour étudier le fonctionnement d'une machine synchrone à facteur de puissance constant.

PARTIE I

ANALOGIE STRUCTURELLE ELECTROMECHANIQUE

**_*_*_*_*_*_*_

1 - INTRODUCTION

Nous allons rappeler rapidement les aspects essentiels de l'analogie entre la théorie des réseaux électriques et la mécanique des systèmes, qui nous serviront de point de départ pour l'étude des systèmes électromécaniques.

Nous regarderons les systèmes mécaniques comme constitués par un nombre fini de points matériels, soumis à des liaisons mécaniques, ce qui suffira pour établir les équations de mouvement des solides, les seules dont on ait besoin dans le domaine de l'électromécanique classique.

Les réseaux électriques sont toujours associés à un système mécanique, celui des conducteurs où circulent les courants et des condensateurs où s'accumulent les charges. Pourtant, en parlant de réseau électrique, nous ferons abstraction de la partie mécanique du système, ne retenant que son aspect purement électrique. Ainsi, un réseau électrique sera regardé comme une perturbation de l'espace physique définie, dans le cadre des approximations de l'état quasi-stationnaire, par une certaine configuration géométrique et un nombre fini de variables électriques (courants, flux, etc..).

La théorie des réseaux électriques et la théorie des systèmes mécaniques peuvent se développer à partir d'un même principe fondamental, par les mêmes techniques analytiques.

Ce fait traduit l'existence d'une analogie structurelle entre les deux branches de la physique et qui a des implications plus profondes que la simple analogie formelle couramment utilisée en calcul analogique.

L'analogie structurelle a été mise en évidence par Maxwell [1] et des progrès importants ont été faits récemment (1966) grâce à Rouche [16]. Nous allons revoir par la suite, les résultats obtenus dans ce domaine.

On admettra que les systèmes sont caractérisés par des fonctions d'état ce qui exclut de l'analyse les phénomènes d'hystérésis.

2 - LOIS FONDAMENTALES

Considérons un système mécanique de N points matériels.

La position de chaque point sera définie par 3 coordonnées cartésiennes rapportées à un trièdre galiléen. Les $3N$ coordonnées x_u ainsi définies constituent les coordonnées primitives du système.

Nous aurons à utiliser encore les vitesses $\dot{x}_u$, les forces mécaniques $(X)_u$ et les quantités de mouvement w_u .

Par la suite, les indices $u, v, \dots$ seront toujours affectés aux variables mécaniques.

Considérons maintenant un réseau électrique à paramètres concentrés contenant en général des circuits inductifs filiformes et des condensateurs.

Désignons par $\dot{x}_a$ les courants de branches du réseau. Les autres variables électriques seront les "charges dynamiques" $x_a = \int_0^t \dot{x}_a dt$, les tensions $(X)_a$ aux terminaux des différents éléments de branches et les flux w_a à travers les éléments inductifs des branches.

Par la suite, les indices $a, b, \dots$ seront toujours affectés aux variables électriques.

Nous prenons comme lois fondamentales qui régissent le comportement d'un système mécanique et d'un réseau électrique la loi de Newton et la loi de Faraday.

Si on désigne par les indices grecs $\alpha, \beta, \dots$ une variable électrique ou mécanique, les deux lois fondamentales ont la même forme

$$(1) \quad (X_t)_\alpha = \frac{dw_\alpha}{dt}$$

où $(X_t)_\alpha$ représente la force totale selon une coordonnée mécanique ou la tension induite dans une branche d'un réseau.

En général, les $(X_t)_\alpha$ se décomposent en plusieurs termes d'origines différentes.

a) Les forces mécaniques appliquées X_u et les tensions des générateurs de branche X_a . En suivant les conventions de la dynamique, les unes et les autres seront définies comme positives pour le fonctionnement du système en récepteur d'énergie.

Le même sens positif sera adopté pour les autres termes de $(X_t)_\alpha$.

b) Parmi ces termes, certains peuvent dériver d'une fonction d'état $V(x_1, \dots, x_n, t)$ par

$$(2) \quad (X_V)_\alpha = - \frac{\partial V}{\partial x_\alpha}$$

Ce sont les forces conservatives d'un système mécanique ou les tensions électrostatiques d'un réseau électrique. V représente alors l'énergie potentielle du système mécanique ou l'énergie électrostatique du réseau électrique.

c) La transformation continue d'énergie mécanique ou électrique en chaleur se traduit par les forces de frottement et les chutes de tension ohmiques. On se limitera au cas où celles-ci dérivent d'une "fonction de dissipation" $F(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, x_1, \dots, x_n, t)$ par

$$(3) \quad (X_F)_\alpha = - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_\alpha}$$

d) Enfin, parmi les $(X_t)_\alpha$ figurent aussi les forces de liaison d'un système mécanique et les tensions de branche d'un réseau électrique, qu'on désignera par $(X_l)_\alpha$.

Les forces de liaison et les tensions de branches constituent des inconnues qui ne sont pas déterminables par la seule application des lois fondamentales. Pour les déterminer il faut connaître d'autres lois, qu'on appellera "lois de formation" du système et qui sont de deux natures différentes.

Considérons par exemple, deux points matériels rigidement liés (Fig. 1)

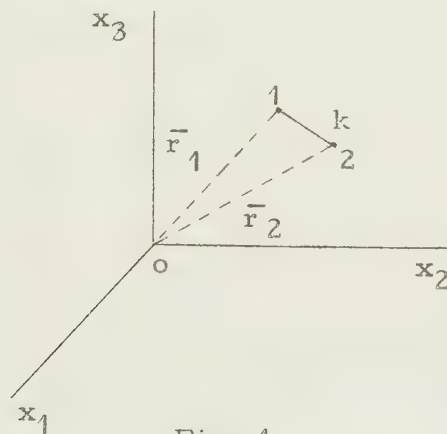


Fig. 1

Le système est soumis à la condition de liaison interne

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 = K^2 = \text{constante}$$

résultant de la loi de rigidité.

Il peut aussi arriver que la liaison se réalise de façon que K soit une certaine fonction du temps. Dans ce cas la liaison sera dite dépendant du temps.

La connaissance de la seule condition précédente ne suffirait pas pour calculer les deux forces de liaison du système. En réalité, ces forces ne sont pas indépendantes, puisqu'elles obéissent au principe d'égalité d'action et de réaction.

Les mêmes concepts se retrouvent dans les réseaux électriques. Par exemple, regardons une maille électrique isolée comme étant l'association en série de deux branches (Fig. 2).

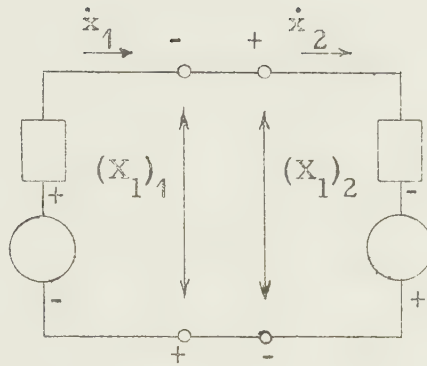


Fig. 2

La condition de connexion interne est donnée par la loi des nœuds de Kirchhoff :

$$\dot{x}_1 - \dot{x}_2 = 0$$

soit

$$x_1 - x_2 = K = \text{constante}$$

Une connexion dépendant du temps serait obtenue en injectant dans le nœud un courant, provenant d'un générateur de courant.

Les tensions de branche $(X_1)_1$ et $(X_1)_2$ ne sont pas indépendantes, puisqu'elles obéissent aussi à l'égalité d'action et de réaction. Et dans le cas général d'une maille avec plus de deux nœuds, les tensions de branche sont encore liées par la loi des mailles de Kirchhoff.

Les exemples précédents montrent qu'on a deux types de lois de formation.

Le premier type de lois concerne les aspects cinématiques ou électrocinétiques du système et conduit à l'établissement des conditions de liaison ou de connexion du système.

Le deuxième type de lois concerne les forces de liaison et permet d'éliminer celles de ces forces qui sont dépendantes.

L'analyse effectuée montre qu'on peut établir les correspondances suivantes entre les variables et fonctions d'état des systèmes mécaniques et des réseaux électriques (TABLEAU I)

TABLEAU I

Notation	Systèmes mécaniques	Réseaux électriques
x	Coordonnée cartésienne	Charge dynamique
$\dot{x}$	vitesse	courant
w	quantité de mouvement	flux
X	force totale appliquée conservative de frottement de liaison	tension induite appliquée électrostatique ohmique de branche
V	énergie potentielle	énergie électrostatique
F	fonction de dissipation	fonction de dissipation

3 - EQUATIONS DE LAGRANGE =====

L'analyse faite au niveau des lois fondamentales et de formation montre l'existence d'une analogie structurelle entre les systèmes mécaniques et les réseaux électriques.

Pour utiliser tous les avantages qui peuvent résulter de cette analogie structurelle, on donne aux équations de fonctionnement une formulation indépendante de l'aspect particulier que prennent les équations

de formation des systèmes.

Parmi les formulations possibles, la lagrangéenne convient très bien à ce but.

Désignons par δx_α la variation virtuelle d'une coordonnée mécanique ou d'une charge dynamique.

Les lois fondamentales permettent d'écrire

$$(4) \quad \sum_{\alpha=1}^n \left[\frac{d w_\alpha}{dt} - (X_t)_\alpha \right] \delta x_\alpha = 0$$

Supposons les variations δx_α telles, que le travail virtuel des forces de liaison ou des tensions de branches soient nulles.

La relation précédente prend la forme

$$(5) \quad \sum_{\alpha=1}^n \left(\frac{d w_\alpha}{dt} - X_\alpha + \frac{\partial V}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_\alpha} \right) \delta x_\alpha = 0$$

où ne figurent plus ni les forces de liaison ni les tensions de branche.

L'équation (5) traduit le principe de d'Alembert de la mécanique, appliqué aussi, ici, aux réseaux électriques.

Se pose maintenant le problème de trouver quelles sont les variations δx_α qui conduisent à un travail virtuel nul des forces de liaison ou des tensions de branche.

Dans cette "Partie I" nous considérons seulement le cas simple des liaisons de contact et des connexions galvaniques réalisées d'une façon passive. C'est le cas classique et les variations δx_α cherchées sont alors celles compatibles avec les conditions instantanées de liaison ou de connexion du système.

Nous appellerons ce type de liaisons ou connexions, de "première espèce". En plus lorsqu'elles peuvent s'exprimer par des relations finies entre les x_α et le temps :

$$(6) \quad f_k(x_1, \dots, x_n, t) = 0 \quad k = 1, \dots, m$$

les liaisons ou connexions de première espèce seront dites "holonomes".

C'est ce cas que nous allons considérer par la suite.

Pour établir les équations de Lagrange on substitue aux coordonnées cartésiennes et aux charges dynamiques x_α un nouveau système de n variables q_α , choisi de façon que les m dernières soient nulles et définies par

$$(7) \quad q_{n-m+k} = f_k(x_1, \dots, x_n, t) = 0 \quad k = 1, \dots, m$$

les $f_k(x_\alpha, t) = 0$ étant les conditions de liaison ou de connexion du système.

La transformation précédente est toujours possible pour les systèmes holonomes [17] et nous pouvons maintenant exprimer les x_α en fonction des q_α et du temps par les relations

$$(8) \quad x_\alpha = x_\alpha(q_1; \dots, q_{n-m}, t)$$

où ne figurent que les $n-m$ premières q_α , les autres pouvant être ignorées puisqu'elles sont nulles.

Nous appellerons les q_α non nulles "coordonnées généralisées" du système qu'il s'agisse d'un système mécanique ou d'un réseau électrique.

Exprimées en fonction des q_α les variations virtuelles compatibles avec les liaisons ou les connexions instantanées du système sont celles qui laissent les q_{n-m+k} nuls :

$$(9) \quad \delta q_{n-m+k} = 0 \quad k = 1, \dots, m$$

Alors, le principe de d'Alembert s'exprime en fonction des seules variations arbitraires $\delta q_1, \dots, \delta q_{n-m}$, par

$$(10) \quad \delta x_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n-m} \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_\beta} \delta q_\beta$$

et l'expression (5) du principe de d'Alembert devient

$$(11) \quad \sum_{\beta=1}^{n-m} \left[\sum_{\alpha=1}^n \left(\frac{dw_{\alpha}}{dt} - X_{\alpha} + \frac{\partial V}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_{\alpha}} \right) \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial q_{\beta}} \right] \delta q_{\beta} = 0$$

Les variations δq_{β} étant arbitraires, le principe de d'Alembert est équivalent aux $n-m$ équations

$$(12) \quad \sum_{\alpha=1}^n \left(\frac{dw_{\alpha}}{dt} - X_{\alpha} + \frac{\partial V}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_{\alpha}} \right) \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial q_{\beta}} = 0 \quad \beta = 1 \dots n-m$$

qui sont les équations de "mouvement" du système.

Supposons [16] qu'il existe une fonction d'énergie $T_c(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, t)$ telle que

$$(13) \quad w_{\alpha} = \frac{\partial T_c}{\partial \dot{x}_{\alpha}}$$

La fonction T_c est alors définie par

$$(14) \quad T_c = \int_0^{\dot{x}_{\alpha}} \sum_{\alpha=1}^n w_{\alpha} d\dot{x}_{\alpha}$$

ou, si on intègre par parties,

$$(15) \quad T_c = \sum_{\alpha=1}^n w_{\alpha} \dot{x}_{\alpha} - \int_0^{w_{\alpha}} \sum_{\alpha=1}^n \dot{x}_{\alpha} dw_{\alpha}$$

Les intégrations sont réalisées en laissant constants tous les paramètres dont peuvent dépendre w_{α} ou $\dot{x}_{\alpha}$, comme la température ou la configuration d'un réseau.

Le dernier terme de (15) possède une signification bien connue : il représente l'énergie magnétique d'un réseau électrique ou l'énergie cinétique d'un système mécanique, qu'on représentera par T . Alors

$$(16) \quad T_c = \sum_{\alpha=1}^n w_{\alpha} \dot{x}_{\alpha} - T$$

Dans le cas particulier d'une seule variable x_α la représentation graphique donne une idée de la relation entre T_c et T (fig. 3)

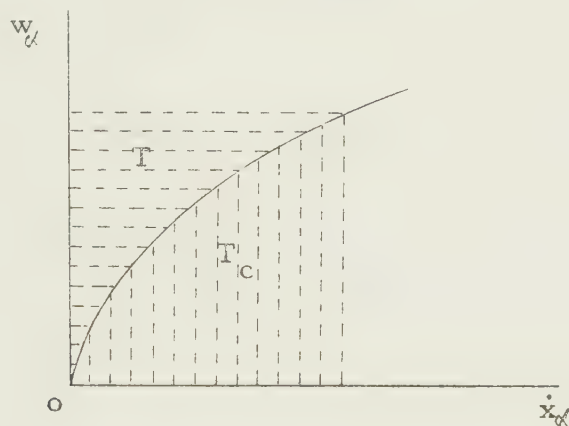


Fig. 3

La fonction T_c est associée aux échanges d'énergie du système avec l'extérieur.

Elle a été introduite en électricité [22] et à la suite des travaux de Cherry [18] elle est désignée par "coénergie cinétique" d'un système mécanique ou "coénergie magnétique" d'un réseau électrique.

Dans le cas particulier des systèmes linéaires la coénergie et l'énergie s'identifient numériquement. Cela explique pourquoi une telle notion n'est pas utilisée plus couramment : c'est notamment le cas de la mécanique non-relativiste.

Les considérations précédentes montrent que l'énergie magnétique d'un réseau électrique joue un rôle analogue à celui de l'énergie cinétique d'un système mécanique, à l'inverse de l'énergie électrostatique qui jouait le rôle d'une énergie potentielle.

Les équations de mouvement (12) peuvent s'écrire en fonction de

$$(17) \quad \sum_{\alpha=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T_c}{\partial \dot{x}_\alpha} - X_\alpha + \frac{\partial V}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_\alpha} \right) \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_\beta} = 0 \quad \beta = 1, \dots, n-m$$

Pour éliminer les variables intermédiaires x_α on remarque que

$$(18) \quad \dot{x}_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n-m} \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_\beta} \dot{q}_\beta + \frac{\partial x_\alpha}{\partial t}$$

soit

$$(19) \quad \frac{\partial \dot{x}_\alpha}{\partial \dot{q}_\beta} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_\beta}$$

En plus, les fonctions d'état V , F , T_c qui s'exprimaient en fonction des $\dot{x}_\alpha$, x_α , t s'expriment maintenant en fonction des $\dot{q}_\beta$, q_β , t :

$$(20) \quad \begin{aligned} T_c &= T_c(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{n-m}, q_1, \dots, q_{n-m}, t) \\ V &= V(q_1, \dots, q_{n-m}, t) \\ F &= F(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{n-m}, q_1, \dots, q_{n-m}, t) \end{aligned}$$

Les équations (17) deviennent alors

$$(21) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T_c}{\partial \dot{q}_\beta} - \frac{\partial T_c}{\partial q_\beta} + \frac{\partial V}{\partial q_\beta} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_\beta} = Q_\beta \quad (\beta = 1, \dots, n-m)$$

avec

$$(22) \quad Q_\beta = \sum_{\alpha=1}^n x_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_\beta}$$

La fonction d'état V sera appelée en langage généralisé "énergie potentielle" du système qu'il s'agisse d'un système mécanique ou d'un réseau électrique.

La fonction F sera toujours désignée par "fonction de dissipation" du système.

Les variables Q_β sont les coefficients de δq_β dans l'expression du travail virtuel des forces ou tensions appliquées au système : on les appellera "forces généralisées appliquées" qu'il s'agisse de systèmes mécaniques ou électriques.

La fonction T_c sera appelée "coénergie cinétique" du système mécanique ou électrique.

Les résultats précédents permettent de définir la "fonction lagrangéenne" d'un système mécanique ou électrique par

$$(23) \quad L = T_c - V$$

qui introduite dans les équations (21) donne

$$(24) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} - \frac{\partial L}{\partial q_\beta} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_\beta} = Q_\beta \quad \beta = 1, \dots, n-m$$

Ce sont les équations de Lagrange d'un système non conservatif qui, comme nous venons de le voir, décrivent aussi bien le "mouvement" d'un système mécanique que celui d'un réseau électrique lorsque les liaisons sont holonomes, le terme de liaisons étant dorénavant étendu aux connexions électriques.

4 - PRINCIPE D'HAMILTON

Dans la déduction des équations de Lagrange nous avons pris comme point de départ les lois fondamentales de Newton et de Faraday qui constituent deux lois distinctes dans l'espace physique.

Mais les équations de Lagrange traduisent un seul principe fondamental, dans l'espace de configuration q_β , qui est le principe d'Hamilton.

Le mouvement du système est décrit dans l'espace de configuration par la trajectoire d'un point en fonction du temps.

Le principe d'Hamilton étudie le mouvement de ce point entre deux instants t_1 et t_2 , en utilisant des variations virtuelles de ce mouvement par rapport au mouvement naturel.

Soit (a) la trajectoire du système et (b) un arc adjacent, entre les instants t_1 et t_2 (Fig. 4)

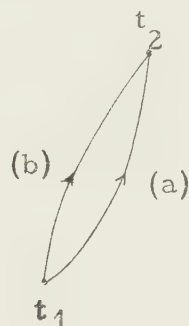


Fig. 4

Soit δ la variation qui nous permet de passer d'un point de la trajectoire (a) au point contemporain de l'arc (b) [19] .

On a

$$(25) \quad \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\beta=1}^{n-m} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} \delta \dot{q}_\beta + \frac{\partial L}{\partial q_\beta} \delta q_\beta \right) dt$$

Les équations de Lagrange permettent de calculer $\frac{\partial L}{\partial q_\beta}$. Si on tient compte en plus de

$$(26) \quad \delta \dot{q}_\beta = \frac{d}{dt} \delta q_\beta$$

l'équation (25) devient

$$(27) \quad \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \left| \sum_{\beta=1}^{n-m} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} \delta q_\beta \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\beta=1}^{n-m} \left(Q_\beta - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_\beta} \right) \delta q_\beta dt$$

La variation δq_β peut être identifiée à un déplacement virtuel. Ainsi

$$(28) \quad \delta W = \sum_{\beta=1}^{n-m} \left(Q_\beta - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_\beta} \right) \delta q_\beta$$

représente le travail virtuel des "forces non conservatives"

$$Q_{\beta} \text{ et } - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_{\beta}}$$

Si on tient compte du fait que, la variation considérée étant à extrêmes fixes,

$$(29) \quad \left(\delta q_{\beta} \right)_{t_1} = 0 \quad \left(\delta q_{\beta} \right)_{t_2} = 0$$

on obtient à partir de (27) la relation

$$(30) \quad \int_{t_1}^{t_2} (\delta L + \delta W) = 0$$

Cette relation traduit le principe d'Hamilton pour des systèmes non-conservatifs : l'intégrale de la variation de la lagrangéenne entre deux instants est compensée par le travail virtuel des forces non-conservatives associé à la variation.

Dans cet exposé, nous allons considérer le principe d'Hamilton comme le postulat fondamental.

L'avantage de ce point de vue est que le principe d'Hamilton ne fait intervenir que des concepts énergétiques. Il constitue alors le langage adéquat pour traiter d'une façon unifiée des systèmes de nature physique différente comme le sont les systèmes mécaniques et les réseaux électriques [20] .

Le principe d'Hamilton reste applicable au cas où les q_{β} ne sont pas indépendants et on verra plus tard la forme qu'il confère aux équations de mouvement.



5 - DUALITE

Nous avons introduit l'analyse lagrangéenne d'un réseau électrique en utilisant un espace de configuration défini à partir des charges dynamiques du réseau, ce qui correspond au point de vue proposé par Maxwell.

Mais nous aurions pu aussi utiliser un espace de configuration défini à partir des impulsions aux terminaux des différents éléments du réseau, ce qui correspond au point de vue "dual" de Darrieus.

Les fonctions d'énergie échangent leur rôle cinétique et potentiel, mais l'aspect formel de la théorie reste bien le même.

La nature des variables lagrangéennes utilisées dans les deux analogies électromécaniques est donnée dans le TABLEAU II où on indique aussi des notations habituelles pour ces variables, que nous utiliserons plus tard.

TABLEAU II

variable lagrangéenne	nature de la variable dans l'analogie de Maxwell	nature de la variable dans l'analogie de Darrieus
$q_\beta = \int \dot{q}_\beta \, dt$	charge dynamique	non désignée
$\dot{q}_\beta$	courant (i)	tension (v)
Q_β	tension (v)	courant (i)
p_β	flux (ψ)	charge électrostatique ($\tilde{q}$)
T_c	coénergie magnétique (W'_m)	coénergie électrostatique (W'_e)
V	énergie électrostatique (W_e)	énergie magnétique (W_m)



La charge d'un condensateur dans l'analogie de Maxwell ou le flux à travers un circuit dans l'analogie de Darrieus $q_{(\beta s)}$ sont donnés en fonction de la variable dynamique q_{β} par :

$$(31) \quad q_{(\beta s)} = q_{\beta} + K_s$$

Les deux points de vue précédents sont appelés "duals" et aucun d'eux ne parait plus fondamental que l'autre.

Ainsi, si on exclut des cas spéciaux où on ne peut pas définir les fonctions d'état d'après une des analogies mais où on peut le faire d'après l'autre [16] leur choix dépend de considérations pratiques concernant les caractéristiques du réseau à analyser.

Dans le travail qui va suivre nous adopterons d'abord l'analogie de Maxwell, qui est la plus utilisée en électromécanique et nous passerons ensuite à l'analogie de Darrieus.



PARTIE II

ETUDE DES
SYSTEMES ELECTROMECANQUES

-*-*-*-*-



1 - INTRODUCTION

Les réseaux électriques et les systèmes mécaniques peuvent être associés de façon qu'il y ait un échange d'énergie entre les deux systèmes.

L'ensemble peut alors être regardé comme un seul système dynamique qu'on appelle "système électromécanique".

Nous ne considérons que des systèmes mécaniques constitués par des solides : ainsi nous prenons comme coordonnées mécaniques $q_u, q, \dots$ les coordonnées de position de ces solides, en général non cartésiennes.

Comme coordonnées électriques $q_a, q_b, \dots$ nous prenons les charges dynamiques dans les branches du réseau électrique.

Ces deux types de coordonnées sont insuffisants dans le cas général pour définir complètement un système électromécanique.

C'est pourquoi nous allons introduire aussi les coordonnées géométriques $q_{(au)}, q_{(bv)}, \dots$ caractérisant la configuration du système électrique dans l'espace et les coordonnées $q_{(as)}, \dots$ qui sont les charges électrostatiques des condensateurs.

Comme nous le verrons plus tard, les coordonnées $q_{(au)}$ seront associées à des coordonnées mécaniques q_u : l'indice doublé (au) indiquera en même temps à quel circuit électrique a et à quelle coordonnée mécanique u elles sont associées.

De même, l'indice doublé des coordonnées $q_{(as)}$ indique à quel circuit a et à quel condensateur s elle sont associées.

Par contre, dans les formulations générales nous aurons avantage à désigner les nouvelles coordonnées par un indice simple comme on fait pour les coordonnées mécaniques et électriques.



Pour identifier les coordonnées géométriques prenons comme exemple le circuit induit OABCO d'une roue de Barlow (Fig. 5) en admettant que la conductivité radiale σ_r est très supérieure à la conductivité tangentielle σ_t de façon que le courant entre balais puisse être considéré comme linéique.

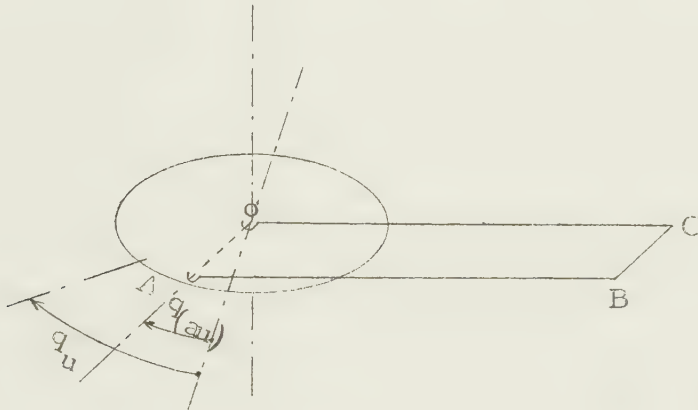


Fig. 5

Le système mécanique introduit la coordonnée de position du rotor, qui est l'angle q_u ainsi que les coordonnées q_v de position des conducteurs extérieurs ABCO.

Nous avons de plus l'angle $q_{(au)}$ définissant la position dans l'espace du tube de courant OA et les coordonnées $q_{(av)}$ définissant la configuration du tube de courant extérieur ABCO.

La distinction entre les coordonnées q_u et $q_{(au)}$ est indispensable sur la roue. Dans la partie filiforme du circuit, les coordonnées q_v et $q_{(av)}$ sont rigidement liées, ce qui permettra d'éliminer $q_{(av)}$.

Considérons maintenant les fonctions d'état.

La fonction lagrangéenne du système contient seulement une partie mécanique et une partie électrique, puisqu'il n'y a pas d'énergie d'interaction entre les systèmes électrique et mécanique [1].

Alors, en utilisant les indices M pour les parties mécaniques et E pour les parties électriques, il vient



$$(32) \quad L = L_M + L_E = (T_{cM} - V_M) + (T_{cE} - V_E) \\ = (T_{cM} + T_{cE}) - (V_M + V_E) = T_c - V$$

La partie mécanique de la fonction lagrangéenne dépend des coordonnées mécaniques q_u , des vitesses respectives $\dot{q}_u$ et éventuellement, du temps

$$(33) \quad L_M (\dot{q}_u, q_u, t) = T_{cM} (\dot{q}_u, q_u, t) - V_M (q_u, t)$$

La partie électrique de la lagrangéenne est une fonction des coordonnées $q_{(as)}$, des vitesses $\dot{q}_a$, des coordonnées $q_{(au)}$ qui définissent la configuration du système électrique, des coordonnées mécaniques q_u définissant la position des corps ferromagnétiques ou diélectriques du système, et du temps :

$$(34) \quad L_E (\dot{q}_a, q_{(as)}, q_u, q_{(au)}, t) = \\ = T_{cE} (\dot{q}_a, q_u, q_{(au)}, t) - V_E (q_{(as)}, q_u, q_{(au)}, t)$$

On aura ainsi, en général

$$(35) \quad L = L (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, q_1, \dots, q_n, t)$$

La fonction de dissipation du système électromécanique se décompose, elle aussi, en une partie mécanique et une partie électrique. En général, on pourra écrire :

$$(36) \quad F (\dot{q}_u, \dot{q}_a, q_{(au)}, q_u, t) = \\ F_M (\dot{q}_u, q_u, t) + F_E (\dot{q}_a, q_{(au)}, q_u, t)$$

Nous admettrons que la fonction de dissipation ne fait pas intervenir les vitesses $\dot{q}_{(au)}$ et $\dot{q}_{(as)}$.



Il peut y avoir entre les coordonnées q_γ d'un système électromécanique des liaisons de plusieurs natures.

Les plus simples sont les liaisons de "première espèce", électriques ou mécaniques, déjà rencontrées dans la Partie I.

Il y a encore d'autres types de liaisons plus complexes que nous appellerons de "deuxième espèce". Pour ces liaisons, les déplacements virtuels auxquels correspond un travail nul des forces de liaison peuvent être tout à fait indépendants des conditions de liaison.

C'est notamment le cas de ce que nous appellerons "liaisons électromécaniques" reliant les coordonnées $q_{(au)}$ et $q_{(as)}$ aux coordonnées mécaniques, aux coordonnées électriques et au temps. Un exemple très particulier de liaison électromécanique a déjà été rencontré plus haut : les coordonnées $q_{(av)}$ et q_v du circuit extérieur d'une roue de Barlow sont en effet rigidement liées.

Un autre type important de liaisons de deuxième espèce est celui des "liaisons d'asservissement", qui ont été introduites en dynamique analytique par Beghin [12] .

Pour étudier des systèmes avec des liaisons de deuxième espèce nous allons reprendre et systématiser les techniques utilisées par Béghin dans l'étude des liaisons d'asservissement.

2 - TECHNIQUES ANALYTIQUES.

Admettons que les liaisons de première et de deuxième espèce se traduisent par m relations entre les coordonnées, les vitesses et le temps

$$(37) \quad f_i (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, q_1, \dots, q_n, t) = 0 \quad i = 1, \dots, m$$



Les relations précédentes seront assurées par des forces de liaison R_γ s'exerçant selon les coordonnées q_γ .

Les forces de liaison ne sont pas indépendantes. Dans le cas des liaisons électriques galvaniques, les relations entre les forces de liaison sont données par la loi des mailles de Kirchhoff et dans le cas des liaisons mécaniques de contact, ces relations proviennent du principe d'égalité d'action et de réaction. Nous verrons plus tard que pour les forces de liaisons électromécaniques des relations peuvent être obtenues à partir des lois de l'électromagnétisme.

Désignons par R_j ($j = 1, \dots, m'$) les forces de liaison indépendantes, aussi bien de première que de deuxième espèce.

Dans les systèmes électromécaniques que nous aurons à considérer, les forces de liaison R_γ peuvent s'exprimer linéairement en fonction des forces de liaison indépendantes R_j . Pour que le travail virtuel des liaisons soit nul, quelles que soient les R_j , les déplacements virtuels doivent alors vérifier m' relations de la forme

$$(38) \quad \sum_{\gamma=1}^n A_{j\gamma} \delta q_\gamma = 0 \quad j = 1, \dots, m'$$

où les coefficients $A_{j\gamma}$ peuvent être en général fonction des coordonnées, des vitesses et du temps.

Ces conditions de travail virtuel nul des forces de liaison peuvent être utilisées pour établir les équations de mouvement et leur recherche constitue le point de départ pour l'étude du système.

Le principe d'Hamilton est applicable même si les coordonnées q_γ ne sont pas indépendantes. Seulement, la définition du travail virtuel des forces non conservatives doit être revue.

En effet, il faut inclure dans ce travail celui des forces de liaison du système, à moins que nous limitons les variations des coordonnées à celles



qui vérifient les conditions (38).

C'est la solution que nous adoptons et le principe d'Hamilton peut alors être développé en ne faisant intervenir que les forces appliquées et de dissipation :

$$(39) \quad \int_{t_1}^{t_2} (\delta L + \delta W) dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{\gamma=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_{\gamma}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\gamma}} Q_{\gamma} - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_{\gamma}} \right) \delta q_{\gamma} = 0$$

Nous ne pouvons pas déduire de (39) les équations de Lagrange, puisque les variations δq_{γ} n'étant plus indépendantes il n'est pas certain que leurs coefficients soient nuls.

Pour obtenir les équations de mouvement, on utilise la technique des multiplicateurs de Lagrange [18], qui nous conduit aux n équations

$$(40) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\gamma}} - \frac{\partial L}{\partial q_{\gamma}} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_{\gamma}} = Q_{\gamma} + \sum_{j=1}^{m'} \lambda_j A_{j\gamma} \quad \gamma = 1, \dots, n$$

où les λ_j représentent les m' multiplicateurs inconnus.

Les n équations (40) avec les m équations de liaison (37) doivent définir le mouvement du système.

Pour que le problème soit déterminé, il faut donc que

$$(41) \quad m = m'$$

c'est-à-dire qu'il y ait autant de forces de liaison indépendantes qu'il y a de conditions de liaison à satisfaire.

C'est la situation que nous trouverons dans l'étude des systèmes électromécaniques courants, si le problème est bien posé.

Ainsi, par la suite, nous admettrons que (41) est vérifiée.



Dans la présente formulation nous n'éliminons pas les forces de liaison, qui peuvent s'identifier aux termes supplémentaires des équations (40) :

$$(42) \quad R_{\gamma} = \sum_{j=1}^m \lambda_j A_{j\gamma} \quad \gamma = 1, \dots, n$$

Pourtant, pour étudier le mouvement il n'est pas nécessaire de calculer les forces de liaison, c'est-à-dire, les λ_j . On peut éliminer ceux-ci de $n-m$ équations lagrangiennes qui avec les m conditions de liaison détermineront le mouvement.

Souvent on désire éliminer des variables dépendantes et on peut utiliser pour cela les conditions de liaisons holonomes du système, s'il y en a.

Nous analyserons ce problème dans le cas de certaines liaisons holonomes qui nous intéressent plus particulièrement en électromécanique et qu'on définira par la suite.

Si les liaisons holonomes se traduisent par s relations

$$(43) \quad f_k(q_1, \dots, q_n, t) = 0 \quad k = 1, \dots, s$$

les conditions de comptabilité des déplacements réels avec ces liaisons sont

$$(44) \quad \sum_{\gamma=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial q_{\gamma}} dq_{\gamma} + \frac{\partial f_k}{\partial t} dt = 0 \quad k = 1, \dots, s$$

Alors, les conditions de travail virtuel nul des forces de liaison correspondantes sont

$$(45) \quad \sum_{\gamma=1}^n A_{k\gamma} \delta q_{\gamma} = \sum_{\gamma=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial q_{\gamma}} \delta q_{\gamma} = 0 \quad k = 1, \dots, s$$

Le type de liaisons que nous nous proposons d'analyser est celui où les $A_{k\gamma}$ sont des constantes. Il s'agit d'un cas particulier qui couvre les liaisons galvaniques simples et encore un grand nombre de liaisons mécaniques simples. Il se vérifie aussi dans un cas important de liaisons électromécaniques.

Définissons à partir du système de coordonnées q_γ un nouveau système de coordonnées $q_{\alpha'}$ ($\alpha' = 1 \dots n$) tel que

$$(46) \quad dq_{\beta'} = C_{\beta'\gamma} dq_\gamma$$

$$dq_{(n-s+k)'} = \sum_{\gamma=1}^n C_{(n-s+k)'\gamma} dq_\gamma = -C_{(n-s+k)'\circ} dt$$

$\gamma = 1, \dots, n; \beta' = 1, \dots, n-s; k = 1, \dots, s$

où

$$(47) \quad C_{\beta'\gamma} = \delta_{\gamma}^{\beta'}$$

$$C_{(n-s+k)'\gamma} = \frac{\partial f_k}{\partial q_\gamma} = A_{k\gamma} \quad ; \quad C_{(n-s+k)'\circ} = \frac{\partial f_k}{\partial t}$$

avec $\det C_{\alpha'\gamma} \neq 0$.

En fonction des coordonnées $q_{\alpha'}$, les conditions de travail virtuel nul (45) s'écrivent :

$$(48) \quad \delta q_{(n-s+k)'} = 0 \quad k = 1, \dots, s$$

Ce résultat montre qu'il n'y a pas de forces de liaison holonomes selon les coordonnées $q_{\beta'}$ ($\beta' = 1, \dots, n-s$) puisque les $\delta q_{\beta'}$ sont arbitraires et que le travail correspondant est nul.

Ecrivons les équations de mouvement en fonction des nouvelles coordonnées $q_{\alpha'}$.

Les fonctions lagrangéenne et de dissipation s'exprimaient dans les vitesses $\dot{q}_\gamma$, les coordonnées q_γ et le temps. On peut utiliser la transformation (46) pour les exprimer dans les nouvelles vitesses $\dot{q}_{\alpha'}$, les

nouvelles coordonnées $q_{\alpha'}$, et le temps. Désignons par L' et F' les fonctions ainsi modifiées.

$$(49) \quad L'(\dot{q}_{\alpha'}, q_{\alpha'}, t) = L(\dot{q}_{\gamma}, q_{\gamma}, t)$$

$$F'(\dot{q}_{\alpha'}, q_{\alpha'}, t) = F(\dot{q}_{\gamma}, q_{\gamma}, t)$$

Les équations de mouvement (40) peuvent s'écrire

$$(50) \quad \frac{d}{dt} \left(\sum_{\alpha'=1}^n C_{\alpha'\gamma} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_{\alpha'}} \right) - \sum_{\alpha'=1}^n C_{\alpha'\gamma} \frac{\partial L'}{\partial q_{\alpha'}} + \sum_{\alpha'=1}^n C_{\alpha'\gamma} \frac{\partial F'}{\partial \dot{q}_{\alpha'}} =$$

$$= Q_{\gamma} + \sum_{k=1}^s \lambda'_k A_{k\gamma} + \sum_{l=s+1}^m \lambda'_l A_{l\gamma} \quad \gamma = 1, \dots, n$$

où les $C_{\alpha'\gamma}$ sont les éléments de la matrice de la transformation (46) et λ' les multiplicateurs de Lagrange à calculer en fonction des $q_{\alpha'}$.

Si on multiplie les équations (50) par les éléments $C_{\gamma\delta'}$ de la transformation inverse de (46) et qu'on somme en γ , on obtient

$$(51) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_{\delta'}} - \frac{\partial L'}{\partial q_{\delta'}} + \frac{\partial F'}{\partial \dot{q}_{\delta'}} =$$

$$\sum_{\gamma=1}^n C_{\gamma\delta'} Q_{\gamma} + \sum_{\gamma=1}^n C_{\gamma\delta'} \sum_{k=1}^s \lambda'_k A_{k\gamma} + \sum_{\gamma=1}^n C_{\gamma\delta'} \sum_{l=s+1}^m \lambda'_l A_{l\gamma}$$

$$\delta' = 1, \dots, n$$

Dans ces équations

$$(52) \quad \sum_{\gamma=1}^n C_{\gamma\delta'} Q_{\gamma} = Q_{\delta'}$$

représente la force appliquée selon la coordonnée $q_{\delta'}$.

Le reste du second membre représente les forces de liaison selon ces mêmes coordonnées.

Si on ne veut pas connaître les forces de liaison dues aux liaisons holonomes, on ne gardera de (51) que les $n-s$ équations selon les coordonnées

$q_{\beta'}$ définies en (46). Les équations sont

$$(53) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_{\beta'}} - \frac{\partial L'}{\partial q_{\beta'}} + \frac{\partial F'}{\partial \dot{q}_{\beta'}} = Q_{\beta'} + \sum_{\gamma=1}^n \sum_{l=s+1}^m C_{\gamma\beta'} \lambda'_{l1} A_{l1\gamma}$$

$$\beta' = 1, \dots, n-s$$

Les n coordonnées $q_{\alpha'}$ y figurent formellement, mais d'après (46) il y en a s qui sont des fonctions connues du temps et peuvent être éliminées. Alors le problème restera déterminé par les $n-s$ équations (53) et les $m-s$ conditions de liaison autres que les holonomes.

Les conditions de travail virtuel nul des forces de liaison autres que les holonomes s'écrivaient en fonction des variables q_{γ} :

$$(54) \quad \sum_{\gamma=1}^n A_{l1\gamma} \delta q_{\gamma} = 0 \quad l = s+1, \dots, m$$

En fonction des $n-s$ coordonnées $q_{\beta'}$, ces conditions deviennent

$$(55) \quad \sum_{\gamma=1}^n \sum_{\beta'=1}^{n-s} A_{l1\gamma} C_{\gamma\beta'} \delta q_{\beta'} = \sum_{\beta'=1}^{n-s} A_{l1\beta'} \delta q_{\beta'} = 0$$

$$l = s+1, \dots, m$$

Les équations (53) peuvent être établies directement à partir des conditions (55). Ce résultat montre que malgré l'existence de liaisons de deuxième espèce on peut utiliser les liaisons holonomes, pour éliminer à priori des variables dépendantes.

Cette conclusion nous intéressera dans l'analyse des systèmes électromécaniques.

Par contre, les liaisons de deuxième espèce ne peuvent pas, en général, être utilisées pour éliminer des variables dépendantes.

3 - LIAISONS ELECTROMECHANQUES

Dans ce chapitre nous étudierons les systèmes électromécaniques simples, dégagés de toute liaison externe entre les variables électriques ou mécaniques.

En régime quasi stationnaire nous pouvons séparer les éléments accumulateurs d'énergie magnétique de ceux, accumulateurs d'énergie électrostatique.

Le premier type d'éléments est le plus important pour les applications et nous le trouvons, notamment, dans les machines électriques courantes.

Le deuxième type est moins utilisé, bien qu'on puisse trouver quelques exemples pour des applications spéciales en haute tension.

Dans l'étude qui suit nous ignorons en général la dissipation ce qui n'invalide en rien l'analyse à effectuer puisque les pertes des systèmes électromécaniques sont de nature organique, et non pas intrinsèque au processus de conversion de l'énergie. Nous tiendrons compte de ces pertes à la fin dans la présentation d'équations générales.

3.1 - Éléments à couplage magnétique.

D'un point de vue dynamique, nous avons à considérer deux types principaux d'éléments à couplage magnétique.

Le premier type est constitué par des éléments où le système électrique est rigidement lié au système mécanique. C'est le cas des circuits filiformes à connexions fixes, et le cas des corps ferromagnétiques.

Le deuxième type est celui où le système électrique n'est pas rigidement lié au système mécanique. Nous avons un exemple dans la roue de Barlow de la Fig. 5. Dans ces éléments électromécaniques un

conducteur à deux dimensions est parcouru par un courant fixe par rapport à une paire de contacts glissants sur ce conducteur et non pas par rapport au conducteur lui-même. Le conducteur à deux dimensions sera traité comme continu, mais anisotrope d'un point de vue conductibilité (pour que le courant puisse être considéré comme linéique). Nous désignerons ce type d'éléments par circuits à contacts glissants.

On verra que les circuits filiformes peuvent être traités comme un cas particulier des circuits à contacts glissants. Pourtant, il est commode de les séparer au départ, puisque dans les circuits à contacts glissants, les liaisons électromécaniques sont de deuxième espèce alors qu'elles dégènerent en des liaisons holonomes dans les circuits filiformes.

En plus de ces deux types principaux d'éléments électromécaniques à couplage magnétique, il y a encore un troisième type hybride des deux premiers. Ce sont les circuits à commutation.

Les circuits à commutation sont formés de conducteurs filiformes et ils peuvent être étudiés par les techniques propres au premier type d'éléments. Pourtant, les connexions des conducteurs filiformes sont variables de telle façon que les circuits à commutation jouissent en moyenne, des propriétés des circuits à contacts glissants.

Par la suite nous analyserons séparément les trois types d'éléments.

3.1.1 - Circuits filiformes et corps ferromagnétiques sans hystérésis

Fixons d'abord notre attention sur le cas des circuits filiformes.

Les circuits pourront être indéformables ou déformables, mais nous admettrons que leur configuration et position sont définies par un nombre fini de coordonnées.

Soit a un circuit filiforme appartenant à un système électromécanique.

Désignons par q_u les coordonnées géométriques qui définissent la configuration des conducteurs du circuit a. Les conducteurs constituent la partie mécanique du circuit et les coordonnées q_u sont alors les coordonnées mécaniques.

La configuration du système électrique coïncide avec celle du système mécanique, puisque les conducteurs sont filiformes. Ainsi, elle pourra être définie par des coordonnées $q_{(au)}$ en même nombre et égales aux coordonnées mécaniques q_u :

$$(56) \quad q_{(au)} = q_u$$

Les relations (56) constituent les conditions de liaison électromécaniques dans les circuits filiformes.

A ces conditions de liaison correspondent des forces de liaison électromécanique selon les coordonnées q_u et $q_{(au)}$, qu'on désignera, respectivement, par R_u et par $R_{(au)}$.

Puisque les coordonnées q_u et $q_{(au)}$ sont de nature géométrique, les forces de liaison R_u et $R_{(au)}$ sont de nature mécanique.

La force de liaison R_u constitue la force électrodynamique sur le conducteur qui peut être mesurée de l'extérieur.

La force de liaison $R_{(au)}$ constituera une force interne contribuant à maintenir le courant en équilibre.

D'un point de vue dynamique, nous traiterons les forces de liaison R_u et $R_{(au)}$ comme des forces mécaniques de contact entre le système électrique et le système mécanique, obéissant au principe d'égalité d'action et réaction :

$$(57) \quad R_u + R_{(au)} = 0$$

Les conditions de travail virtuel nul sont alors

$$(58) \quad \delta q_u - \delta q_{(au)} = 0$$

ce qui montre que les liaisons électromécaniques (56) peuvent être traitées comme des liaisons holonomes.

Les coordonnées électriques q_a n'interviennent pas dans les conditions de travail virtuel nul : il n'y a pas de forces de liaison électriques. C'était un résultat à prévoir, puisque nous avons étudié les circuits filiformes dans la Partie I sans trouver aucun terme étranger à la formulation purement électrique du problème.

Compte tenu de (58) les équations de mouvement du circuit a seront de la forme générale (40).

Nous avons autant de conditions de travail virtuel nul qu'il y a de coordonnées $q_{(au)}$. Nous désignerons les multiplicateurs de Lagrange correspondants par $\lambda_{(au)}$.

Si on écrit séparément les équations de mouvement selon les trois types de coordonnées du circuit, on obtient, en négligeant l'énergie électrostatique du système et la dissipation :

$$(59-a) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T_{cE}}{\partial \dot{q}_a} = Q_a$$

$$(59-b) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L_M}{\partial \dot{q}_u} - \frac{\partial L_M}{\partial q_u} = Q_u + \lambda_{(au)}$$

$$(59-c) \quad - \frac{\partial T_{cE}}{\partial q_{(au)}} = Q_{(au)} - \lambda_{(au)}$$

Pour un circuit filiforme il y a une seule équation électrique (59-a) et autant d'équations (59-b) et (59-c) qu'il y a de coordonnées q_u et $q_{(au)}$.

Les équations (59) sont applicables à n'importe quel circuit filiforme inductif d'un système électromécanique et constituent des équations générales de ce type de circuit.

Il n'y a pas de force appliquée selon les coordonnées $q_{(au)}$, les seules forces appliquées au système s'exerçant selon les coordonnées mécaniques et électriques :

$$(60) \quad Q_{(au)} = 0$$

Les équations de mouvement (59-c) sont alors

$$(61) \quad \frac{\partial T_{cE}}{\partial q_{(au)}} = \lambda_{(au)}$$

Ce résultat montre que la force de liaison exercée par le système mécanique sur le système électrique est compensée par une force d'inertie généralisée d'origine électromagnétique.

Compte tenu de (61) nous pouvons éliminer les multiplicateurs des équations (59). Le mouvement du système reste alors déterminé par les seules équations lagrangiennes.

$$(62-a) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T_{cE}}{\partial \dot{q}_a} = Q_a$$

$$(62-b) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L_M}{\partial \dot{q}_u} - \frac{\partial L_M}{\partial q_u} = Q_u + \frac{\partial T_{cE}}{\partial q_{(au)}}$$

et par les conditions de liaison (56).

Le fait que les liaisons électromécaniques soient holonomes permet d'éliminer les coordonnées $q_{(au)}$ de la formulation du problème.

Faisons d'après (46)

$$(63) \quad q_{a'} = q_a$$

$$q_{u'} = q_u$$

$$q_{(au)'} = q_u - q_{(au)} = 0$$

La fonction lagrangéenne qui était fonction des coordonnées q_a , q_u et $q_{(au)}$ sera maintenant fonction de nouvelles coordonnées $q_{a'}$ et $q_{u'}$.

Les coordonnées électriques ne participent pas aux conditions de travail virtuel nul et leur rôle est le même dans la nouvelle formulation. Par contre, les $q_{u'}$ jouent maintenant le double rôle des coordonnées q_u et $q_{(au)}$.

Les équations (62) deviennent, alors

$$(64-a) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T'_{cE}}{\partial \dot{q}_{a'}} = Q_{a'}$$

$$(64-b) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L'_M}{\partial q_{u'}} - \frac{\partial L'_M}{\partial q_{u'}} - \frac{\partial T'_{cE}}{\partial q_{u'}} = Q_{u'}$$

qui déterminent complètement le mouvement.

Remarquons que, les forces $Q_{(au)}$ étant nulles (60), on a d'après (52)

$$(65) \quad Q_{u'} = Q_u$$

Ainsi, tous les termes des équations (64) s'identifient à ceux des équations originales (62) à l'exception du terme $\frac{\partial T'_{cE}}{\partial q_{u'}}$.

Ce terme représente la force électrodynamique sur le conducteur, qui se présente maintenant comme une force d'inertie généralisée et non plus comme une force de liaison.

C'est sous la forme (64) que les équations des circuits filiformes sont obtenues dans le modèle dynamique classique, proposé par Maxwell.

Pourtant, l'élimination des variables $q_{(au)}$, possible dans les circuits filiformes où les liaisons électromécaniques sont holonomes, n'est plus possible dans le cas des circuits à contacts glissants.

Il y a un cas important où le modèle dynamique de Maxwell s'impose : il s'agit du cas des corps ferromagnétiques.

Les propriétés magnétiques du matériau étant intimement associées à ses propriétés mécaniques, les forces électromagnétiques sur le corps ferromagnétique doivent être calculées par application directe des équations (64-b), les coordonnées $q_{u'}$, étant celles qui définissent la position de la partie ferromagnétique.

Les résultats établis par voie dynamique sont d'accord avec ceux qu'on peut obtenir à partir de l'électromagnétisme.

Ecrivons les équations (64) en utilisant les notations habituelles en électromagnétisme.

Les équations électriques deviennent

$$(66) \quad \frac{d\psi_a}{dt} = v_a$$

qui sont bien d'accord avec les résultats classiques.

Les équations mécaniques peuvent s'écrire

$$(67) \quad \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L_M}{\partial \dot{q}_{u'}} - \frac{\partial L_M}{\partial q_{u'}} \right) - Q_{u'} = \frac{\partial W'_m}{\partial q_{u'}} = (Q_{u'})_{em}$$

en représentant par $(Q_{u'})_{em}$ la force électromagnétique selon la coordonnée $q_{u'}$, et elles sont, elles aussi, en accord avec la théorie classique des circuits.

Le modèle dynamique adopté conduit bien aux équations correctes du mouvement d'un circuit filiforme et nous verrons par la suite qu'il fournit aussi des équations correctes pour les circuits à contacts glissants.

3.1.2 - Circuits à contacts glissants

Nous allons généraliser les résultats précédents au cas où il y a des contacts glissants, tout en conservant l'hypothèse que les courants sont linéiques et que leurs configuration et position sont définies par un nombre fini de coordonnées électromécaniques.

Les coordonnées $q_{(au)}$ et q_u seront définies de façon qu'elles forment des paires de coordonnées de même nature, c'est à dire, qu'elles soient deux à deux des angles de rotation par rapport au même axe ou des distances mesurées selon la même direction, à partir de la même origine.

Par exemple, dans la roue de Barlow de la Fig. 5 la coordonnée $q_{(au)}$ définissant la position du tube de courant OA est associée à la coordonnée q_u qui définit la position de la roue. De même, dans un circuit filiforme les coordonnées $q_{(au)}$ et q_u sont associées par paires, puisqu'elles sont égales deux à deux.

Nous adopterons le même sens positif pour mesurer les coordonnées associées $q_{(au)}$ et q_u .

Etablissons les conditions de liaison électromécaniques.

Dans les tronçons filiformes les conditions de liaison sont :

$$(68) \quad q_{(au)} = q_u$$

comme on en a déjà vu.

Dans les tronçons à contacts glissants les coordonnées $q_{(au)}$ sont indépendantes des coordonnées mécaniques associées. Elles dépendent de la position des contacts glissants, qui est, à son tour, fonction des coordonnées q_v du circuit extérieur.

$$(69) \quad q_{(au)} = q_{(au)}(q_v) \quad v \neq u$$

Il peut encore arriver que les conducteurs du circuit extérieur soient soumis à des liaisons $q_v = q_v(t)$. Dans ce cas on peut écrire

$$(70) \quad q_{(au)} = q_{(au)}(t)$$

Ainsi, les conditions de liaison électromécanique seront de la forme générale:

$$(71) \quad q_{(au)} = q_{(au)}(q_v, t)$$

qui contient comme cas particulier celui des conducteurs filiformes.

Pour établir les équations de mouvement des circuits à contacts glissants, nous reprenons le modèle dynamique introduit pour l'étude des circuits filiformes.

Nous avons alors vérifié que les forces de liaison R_u et $R_{(au)}$ obéissent au principe d'égalité d'action et de réaction, ce qui doit aussi être vrai dans le cas des circuits à contacts glissants.

Pourtant, il y a maintenant un fait nouveau qui est le mouvement relatif du conducteur à deux dimensions par rapport au courant linéique. Il en résulte que les forces de liaison R_u et $R_{(au)}$ travaillent avec la vitesse $\dot{q}_u - \dot{q}_{(au)}$.

A ce travail des forces de liaison mécanique correspond l'apparition d'une nouvelle force de liaison, de nature électrique, qui s'exerce selon la coordonnée q_a : c'est la f.e.m induite associée à la vitesse relative $\dot{q}_u - \dot{q}_{(au)}$.

Désignons cette force de liaison électrique par $(R_a)_u$.

Pour établir la relation entre les forces de liaisons mécaniques $R_u = -R_{(au)}$ et électrique $(R_a)_u$ nous ne disposons plus du principe d'égalité d'action et de réaction, puisqu'il s'agit de forces de nature physique différente. La relation entre les deux types de forces, nous devons l'emprunter à l'électromagnétisme.

Soit $\bar{j}_a = \rho_a \bar{x}_a$ la densité de courant.

Supposons que toutes les vitesses de nature géométrique du système soient nulles, à l'exception de deux vitesses associées $\dot{q}_u$ et $\dot{q}_{(au)}$.

La force de liaison R_u est telle que :

$$(72) \quad R_u \delta q_u = \iiint \rho_a (\bar{x}_a \times \bar{B} \cdot \frac{\partial \bar{y}}{\partial q_u}) \delta q_u dV_a$$

où $\bar{B}$ représente l'induction magnétique $\frac{\partial \bar{y}}{\partial q_u}$ la dérivée partielle de position d'un point du circuit et dV_a l'élément de volume du circuit.

Si le circuit est linéique on obtient

$$(73) \quad R_u = \dot{q}_a \oint d\bar{s}_a \times \bar{B} \cdot \frac{\partial \bar{y}}{\partial q_u}$$

où on représente par $d\bar{s}_a$ un élément linéaire du circuit.

La f. e. m. associée à la vitesse $\dot{q}_u - \dot{q}_{(au)}$ est telle que

$$(74) \quad (R_a)_u \delta q_a = \iiint \rho_a (\bar{y} - \bar{y}_a) \times \bar{B} \cdot \delta \bar{x}_a dV_a$$

où $\bar{y}$ et $\bar{y}_a$ représentent les vitesses linéaires associées aux vitesses généralisées $\dot{q}_u$ et $\dot{q}_{(au)}$.

D'après le choix des coordonnées, il vient :

$$(75) \quad \frac{\partial \bar{y}}{\partial q_u} = \frac{\partial \bar{y}_a}{\partial q_{(au)}}$$

alors

$$(76) \quad \bar{y} - \bar{y}_a = (\dot{q}_u - \dot{q}_{(au)}) \frac{\partial \bar{y}}{\partial q_u}$$

Si le circuit est linéique et qu'on tienne compte de

$$(77) \quad \iint \rho_a \delta \bar{x}_a dS_a = \delta q_a \frac{d\bar{s}_a}{ds_a}$$

on obtient :

$$(78) \quad (R_a)_u = (\dot{q}_u - \dot{q}_{(au)}) \oint \frac{\partial \bar{y}}{\partial q_u} \times \bar{B} \cdot d\bar{s}_a$$

La comparaison de (73) et (78) fournit immédiatement la relation cherchée entre les forces de liaisons mécanique et électrique :

$$(79) \quad (R_a)_u = - \frac{\dot{q}_u - \dot{q}_{(au)}}{\dot{q}_a} R_u$$

Dans cette relation interviennent les vitesses et cela est naturel puisque les forces de liaison à l'étude dépendent des vitesses.

Puisque la force de liaison R_u tend vers zéro au moins avec $\dot{q}_a$, la relation (79) reste applicable si le circuit est à vide.

Elle est aussi applicable aux circuits filiformes, pour lesquels il vient

$$(80) \quad (R_a)_u = 0$$

résultat qui est d'accord avec ceux obtenus précédemment.

Les conditions de travail virtuel nul des forces de liaison électromécanique

$$(81) \quad R_u \delta q_u + R_{(au)} \delta q_{(au)} + (R_a)_u \delta q_a = 0$$

deviennent alors, compte tenu de (57) et (79),

$$(82) \quad R_{(au)} \delta q_u - R_{(au)} \delta q_{(au)} - \frac{\dot{q}_u - \dot{q}_{(au)}}{\dot{q}_a} R_{(au)} \delta q_a = 0$$

soit en divisant par $\frac{\dot{q}_{(au)}}{\dot{q}_a}$ supposé différent de zéro,

$$(83) \quad \dot{q}_a \delta q_u - \dot{q}_a \delta q_{(au)} - (\dot{q}_u - \dot{q}_{(au)}) \delta q_a = 0$$

Si $\frac{R_{(au)}}{\dot{q}_a} = 0$ on conclut de (82) que les variations δq_u , $\delta q_{(au)}$ et δq_a sont arbitraires. Ce cas correspond à celui d'un circuit non inductif ou à celui d'un circuit inductif isolé et à vide. Les conditions (83) ne sont alors pas nécessaires, mais elles restent suffisantes et nous pouvons continuer à les utiliser.

Il y aura autant de conditions (83) qu'il y a de coordonnées $q_{(au)}$.

Si nous désignons par $\lambda_{(au)}$ les multiplicateurs de Lagrange correspondants, les équations lagrangéennes du mouvement sont :

$$(84-a) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T_{cE}}{\partial \dot{q}_a} = Q_a - \sum_u (\dot{q}_u - \dot{q}_{(au)}) \lambda_{(au)}$$

$$(84-b) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L_M}{\partial \dot{q}_u} - \frac{\partial L_M}{\partial q_u} = Q_u + \dot{q}_a \lambda_{(au)}$$

$$(84-c) \quad - \frac{\partial T_{cE}}{\partial q_{(au)}} = - \dot{q}_a \lambda_{(au)}$$

Si on élimine les $\lambda_{(au)}$ il vient :

$$(85-a) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T_{cE}}{\partial \dot{q}_a} = Q_a - \sum_u \frac{\dot{q}_u - \dot{q}_{(au)}}{\dot{q}_a} \frac{\partial T_{cE}}{\partial q_{(au)}}$$

$$(85-b) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L_M}{\partial \dot{q}_u} - \frac{\partial L_M}{\partial q_u} = Q_u + \frac{\partial T_{cE}}{\partial q_{(au)}}$$

qui avec les conditions de liaison (71) déterminent le mouvement.

Les équations précédentes contiennent comme cas particulier celles des circuits filiformes, où on a $\dot{q}_u - \dot{q}_{(au)} = 0$.

Les liaisons (71) sont de deuxième espèce, excepté pour les tronçons filiformes où elles deviennent holonomes.

Avec les notations habituelles en électromagnétisme les équations (85) s'écrivent

$$(86-a) \quad \frac{d\psi_a}{dt} = v_a - \sum_u \frac{\dot{q}_u - \dot{q}_{(au)}}{i_a} \frac{\partial W'_m}{\partial q_{(au)}}$$

$$(86-b) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L_M}{\partial \dot{q}_u} - \frac{\partial L_M}{\partial q_u} - Q_u = \frac{\partial W'_m}{\partial q_{(au)}}$$

Ces équations qui possèdent des termes qu'on ne peut pas éliminer s'il y a des contacts glissants, n'existent pas dans la théorie classique des circuits.

Nous allons confirmer leur validité en les déduisant à partir de l'électromagnétisme.

Considérons un circuit électrique parcouru par un courant linéique i_a .

Prenons en un point M du circuit un élément vectoriel $d\vec{s}_a$ orienté dans la direction et le sens du courant et lié à celui-ci (Fig. 6).

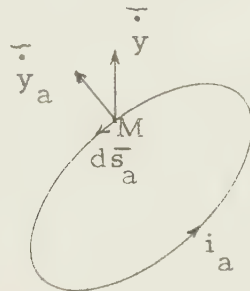


Fig. 6

Soient en M :

$\vec{y}$ la vitesse linéaire du milieu conducteur

$\vec{y}_a$ la vitesse linéaire de l'élément $d\vec{s}_a$

Les deux vitesses seront en général différentes, s'il y a des contacts glissants.

La tension induite dans le circuit s'écrit

$$(87) \quad v_a = \oint \left[\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + (\bar{B} \times \vec{y}) \right] \cdot d\vec{s}_a$$

en représentant par $\bar{A}$ le potentiel vecteur et par $\bar{B}$ le vecteur induction magnétique.

L'expression (87) peut se développer en :

$$(88) \quad v_a = \oint \left[\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + (\bar{B} \times \vec{y}_a) + (\bar{B} \times (\vec{y} - \vec{y}_a)) \right] \cdot d\vec{s}_a$$

Le champ électrique induit est mesuré dans le milieu en mouvement mais l'intégrale curviligne précédente est calculée sur un contour lié au courant électrique.

Une utilisation du théorème de Stokes permet d'établir, comme on fait classiquement pour les circuits filiformes en mouvement [21] :

$$(89) \quad \oint \left[\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + (\bar{B} \times \bar{y}_a) \right] \cdot d\bar{s}_a = \iint \left[\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} + \text{rot} (\bar{B} \times \bar{y}_a) \right] \cdot d\bar{S}_a = \frac{d\psi_a}{dt}$$

La dernière intégrale étant prise sur une surface liée au courant électrique, ψ_a représente le flux à travers le circuit.

La tension induite (88) devient alors

$$(90) \quad v_a = \frac{d\psi_a}{dt} + \oint \bar{B} \times (\dot{\bar{y}} - \dot{\bar{y}}_a) \cdot d\bar{s}_a$$

Le premier terme du second membre représente, du point de vue dynamique, une force d'inertie généralisée et figure comme tel dans les équations lagrangiennes de mouvement.

Par contre, le dernier terme n'est pas associé à une variation réelle de flux à travers le circuit et ne peut pas être calculé comme une force d'inertie généralisée.

Par définition, on a

$$(91) \quad \begin{aligned} d\bar{y} &= \sum_u \frac{\partial \bar{y}}{\partial q_u} dq_u \\ d\bar{y}_a &= \sum_u \frac{\partial \bar{y}_a}{\partial q_{(au)}} dq_{(au)} \end{aligned}$$

Si on tient compte de (75) on peut établir

$$(92) \quad \dot{\bar{y}} - \dot{\bar{y}}_a = \sum_u (\dot{q}_u - \dot{q}_{(au)}) \frac{\partial \bar{y}_a}{\partial q_{(au)}}$$

ce qui nous permet d'écrire le dernier terme de (90) comme

$$(93) \oint \bar{\mathbf{B}} \times (\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{y}}_a) \cdot d\bar{\mathbf{s}}_a = \sum_u (\dot{q}_u - \dot{q}_{(au)}) \oint \bar{\mathbf{B}} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{y}}_a}{\partial q_{(au)}} \cdot d\bar{\mathbf{s}}_a = \mathbf{v}'_a$$

Pour transformer cette expression nous considérons que le circuit électrique (a) est divisé en un grand nombre de circuits élémentaires (a α) parcourus par des courants élémentaires $i_{a\alpha}$.

La tension $\mathbf{v}'_{a\alpha}$ induite dans chaque circuit élémentaire est :

$$(94) \quad \mathbf{v}'_{a\alpha} = \sum_u (\dot{q}_u - \dot{q}_{(au)}) \oint \bar{\mathbf{B}} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{y}}_{a\alpha}}{\partial q_{(au)}} \cdot d\bar{\mathbf{s}}_{a\alpha}$$

dans laquelle on peut négliger la contribution de $i_{a\alpha}$ pour $\bar{\mathbf{B}}$.

La tension résultante $\mathbf{v}'_a$ sera alors par définition:

$$(95) \quad \mathbf{v}'_a = \frac{\sum_{\alpha} \mathbf{v}'_{a\alpha} i_{a\alpha}}{i_a} = \sum_u \frac{\dot{q}_u - \dot{q}_{(au)}}{i_a} \sum_{\alpha} i_{a\alpha} \oint \bar{\mathbf{B}} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{y}}_{a\alpha}}{\partial q_{(au)}} \cdot d\bar{\mathbf{s}}_{a\alpha}$$

soit :

$$(96) \quad \mathbf{v}'_a = \sum_u \frac{\dot{q}_u - \dot{q}_{(au)}}{i_a} \sum_{\alpha} i_{a\alpha} \frac{\partial \psi_{a\alpha}}{\partial q_{(au)}}$$

Cette dernière somme représente la dérivée de la coénergie magnétique par rapport à la coordonnée $q_{(au)}$. On obtient :

$$(97) \quad \mathbf{v}'_a = \sum_u \frac{\dot{q}_u - \dot{q}_{(au)}}{i_a} \frac{\partial W'_m}{\partial q_{(au)}}$$

La tension induite totale (90) est alors

$$(98) \quad \mathbf{v}_a = \frac{d\psi_a}{dt} + \sum_u \frac{\dot{q}_u - \dot{q}_{(au)}}{i_a} \frac{\partial W'_m}{\partial q_{(au)}}$$

ce qui confirme l'équation (86-a) obtenue par des considérations dynamiques.

Pour confirmer l'équation mécanique (86-b) nous combinerons le résultat précédent avec la méthode des déplacements arbitraires et le principe de conservation de l'énergie.

La relation (79) montre que le travail total des liaisons internes est nul. Si l'on néglige alors les pertes on écrira pour tout déplacement du système :

$$(99) \quad \begin{bmatrix} \text{énergie reçue des} \\ \text{sources électriques} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{énergie reçue des} \\ \text{sources mécaniques} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{augmentation d'é-} \\ \text{nergie mécanique} \\ + \text{magnétique} \end{bmatrix}$$

Soit dq_u un déplacement arbitraire infinitésimal du système. Pour que le déplacement dq_u soit réalisable dans le cas où le conducteur est filiforme, il pourra impliquer aussi un déplacement $dq_{(au)} = dq_u$.

Tous les autres déplacements selon des coordonnées géométriques seront considérés comme nuls.

La relation (99) se traduit alors par

$$(100) \quad \sum_{b=1}^P v_b i_b dt + Q_u dq_u = dW_m + dT_M + dV_M$$

Si on tient compte de (98), on obtient

$$(101) \quad \sum_{b=1}^P i_b d\psi_b + \frac{\partial W_m}{\partial q_{(au)}} (dq_u - dq_{(au)}) + Q_u dq_u = \\ = dW_m + dT_M + dV_M$$

Les variations dW_m et $d\psi_b$ s'écrivent :

$$(102) \quad d\psi_b = \sum_c \frac{\partial \psi_b}{\partial i_c} di_c + \frac{\partial \psi_b}{\partial q_{(au)}} dq_{(au)}$$

$$(103) \quad dW_m = \sum_c \frac{\partial W_m}{\partial i_c} di_c + \frac{\partial W_m}{\partial q_{(au)}} dq_{(au)}$$

Si on introduit ces résultats dans l'équation (101) et qu'on tienne compte de la relation

$$(104) \quad \frac{\partial W_m}{\partial i_c} = \sum_b i_b \frac{\partial \psi_b}{\partial i_c}$$

on obtient

$$(105) \quad \frac{\partial W'_m}{\partial q_{(au)}} dq_u + Q_u dq_u = dT_M + dV_M$$

La démonstration est indépendante de la façon dont les courants sont en train de changer avec le temps.

Puisqu'il n'y a pas de liaisons mécaniques externes, on peut écrire

$$(106) \quad dV_M + dT_M = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L_M}{\partial \dot{q}_u} - \frac{\partial L_M}{\partial q_u} \right) dq_u$$

et l'équation (105) se ramène à

$$(107) \quad \frac{\partial W'_m}{\partial q_{(au)}} + Q_u = \frac{d}{dt} \frac{\partial L_M}{\partial \dot{q}_u} - \frac{\partial L_M}{\partial q_u}$$

ce qui nous confirme (86-b) obtenue auparavant.

3.1.3 - Circuits à commutation

Les circuits à commutation sont formés de conducteurs filiformes avec connexions variables. Nous distinguerons deux types de circuits à commutation : les circuits à commutation continue qui, à la limite, deviennent des circuits à contacts glissants ; et les circuits à commutation discontinue, souvent utilisés dans la pratique.

Nous admettons que, à l'exception du circuit analysé, tous les autres circuits du système sont au repos et parcourus par des courants constants.

Cette hypothèse ne diminue pas la généralité des méthodes à utiliser et simplifie les équations.

Nous adopterons dans l'étude des circuits à commutation les notations habituelles en électromagnétisme.

a - Circuits à commutation continue.

On a comme exemple de ce type de circuit l'induit d'une roue de Barlow divisée en rayons isolés et dont les balais couvrent un certain nombre N de rayons, tout en étant suffisamment étroits pour que d'un point de vue pratique, le circuit soit linéique.

Soit Δt_c l'intervalle de temps nécessaire pour que la roue avance d'un rayon par rapport aux balais.

Pendant cet intervalle de temps les courants j_{ak} dans les rayons changent : il y a un rayon où le courant s'annule, parce qu'il a abandonné les balais et un autre rayon où le courant s'établit, parce qu'il entre en circuit.

Nous admettons que la distribution des courants j_{ak} est la même à deux instants t_0 et $t_0 + \Delta t_c$, de façon que Δt_c constitue une période de répétition que nous appellerons "période de commutation".

Le courant total dans le circuit est

$$(108) \quad i_a^x = \sum_k j_{ak}$$

Les courants j_{ak} se ferment par le conducteur extérieur aux balais et nous désignons par v_{ak} la tension induite dans chacun des circuits élémentaires ainsi formés.

La tension induite dans le circuit à commutation sera définie par

$$(109) \quad v_a^x = \frac{\sum_k v_{ak} j_{ak}}{i_a^x}$$

Soit ψ_{ak} le flux à travers un circuit élémentaire j_{ak} . Nous définissons le flux à travers le circuit à commutation par

$$(110) \quad \psi_a^x = \sum_k \frac{\psi_{ak} j_{ak}}{i_a^x}$$

La conénergie magnétique du système W_m^x peut s'exprimer en fonction des courants élémentaires j_{ak} et de leurs coordonnées respectives $q_{(au)k}$. Elle peut aussi s'exprimer en fonction du courant i_a^x supposé uniforme et, compte tenu de (110), d'une certaine coordonnée "pondérée" $q_{(au)}^x$.

Remarquons tout de suite que

$$(111) \quad \dot{q}_{(au)}^x \neq \dot{q}_{(au)k}$$

En effet, les courants élémentaires sont attachés au système mécanique et on a :

$$(112) \quad \dot{q}_{(au)k} = \dot{q}_u^x ;$$

par contre, le courant total reste sensiblement attaché aux balais.

Le circuit total ne pourra alors pas être traité comme filiforme.

Pourtant, les circuits élémentaires sont filiformes et on peut

écrire

$$(113) \quad v_{ak} = \frac{d}{dt} \frac{\partial W_m^x}{\partial j_{ak}} = \sum_{l,u} \frac{\partial^2 W_m^x}{\partial j_{ak} \partial q_{(au)l}} \dot{q}_u^x + \sum_l \frac{\partial^2 W_m^x}{\partial j_{ak} \partial j_{al}} \frac{dj_{al}}{dt}$$

La tension induite totale sera calculée à partir de :

$$(114) \quad v_a^x i_a^x = \sum_{k,l,u} \frac{\partial^2 W_m^x}{\partial j_{ak} \partial q_{(au)l}} j_{ak} \dot{q}_u^x + \sum_{k,l} \frac{\partial^2 W_m^x}{\partial j_{ak} \partial j_{al}} j_{ak} \frac{dj_{al}}{dt}$$

$$= v_{am}^x i_a^x + v_{at}^x i_a^x$$

La tension v_{am}^x est de nature "motionnelle" et peut être calculée comme si le courant total était instantanément lié au système mécanique,

c'est à dire, comme si le circuit était filiforme.

Par contre, la tension v_{at}^x , due aux variations des courants élémentaires est de type "statique". L'intégration par partie de la fonction

$$\sum_k \frac{\partial W'_m{}^x}{\partial j_{ak}} \frac{dj_{ak}}{dt} \text{ permet d'établir :}$$

$$(115) \quad v_{at}^x i_a^x = - v_{am}^x i_a^x - \sum_k \frac{\partial W'_m{}^x}{\partial j_{ak}} \frac{dj_{ak}}{dt} + \frac{d}{dt} \left(\sum_k j_{ak} \frac{\partial W'_m{}^x}{\partial j_{ak}} \right)$$

Ce résultat montre que les courants élémentaires induisent une tension qui compense celle de nature motionnelle. L'équation (114) devient alors

$$(116) \quad v_a^x i_a^x = - \sum_k \frac{\partial W'_m{}^x}{\partial j_{ak}} \frac{dj_{ak}}{dt} + \frac{d}{dt} \left(\sum_k j_{ak} \frac{\partial W'_m{}^x}{\partial j_{ak}} \right)$$

Naturellement, les processus précédents sont intimement associés et il aurait suffi d'intégrer par parties $\sum_k j_{ak} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial W'_m{}^x}{\partial j_{ak}}$ pour obtenir directement l'équation (116).

Pour éliminer les variables "internes", considérons la dérivée totale de la coénergie magnétique exprimée dans ces variables et dans les variables "externes" :

$$(117) \quad \begin{aligned} \frac{d W'_m{}^x}{dt} &= \sum_{k,u} \frac{\partial W'_m{}^x}{\partial q_{(au)k}} \dot{q}_{(au)k}^x + \sum_k \frac{\partial W'_m{}^x}{\partial j_{ak}} \frac{dj_{ak}}{dt} \\ &= \sum_u \frac{\partial W'_m{}^x}{\partial q_{(au)}^x} \dot{q}_{(au)}^x + \frac{\partial W'_m{}^x}{\partial i_a^x} \frac{di_a^x}{dt} \end{aligned}$$

Si on remarque que

$$(118) \quad \sum_k \frac{\partial W'_m{}^x}{\partial q_{(au)k}} = \frac{\partial W'_m{}^x}{\partial q_{(au)}^x}$$

et que

$$(119) \quad \frac{\partial W'_m}{\partial i_a^x} \frac{d i_a^x}{dt} = \frac{d}{dt} \left(- \frac{\partial W'_m}{\partial i_a^x} i_a^x \right) - i_a^x \frac{d \psi_a^x}{dt}$$

et qu'on tienne compte de (110), les relations (136) nous permettent d'éliminer les variables internes.

Les équations (116) deviennent alors

$$(120) \quad v_a^x i_a^x = \sum_u \frac{\partial W'_m}{\partial q_{(au)}^x} (\dot{q}_u^x - \dot{q}_{(au)}^x) + i_a^x \frac{d \psi_a^x}{dt}$$

La période t_c étant suffisamment petite pour qu'on puisse substituer aux valeurs instantanées de (120) les valeurs moyennes pendant l'intervalle Δt_c , on obtient

$$(121) \quad v_a = \frac{d \psi_a}{dt} + \sum_u \frac{\dot{q}_u - \dot{q}_{(au)}}{i_a} \frac{\partial W'_m}{\partial q_{(au)}}$$

qui coïncide avec l'équation (86-a).

Le phénomène de commutation n'induit aucune tension moyenne sur un autre circuit b quelconque couplé avec a. Ce résultat se confirme en dérivant (117) par rapport à i_b .

La force électrodynamique se calcule par

$$(122) \quad (Q_u)_{em}^x = \sum_k \frac{\partial W'_m}{\partial q_{(au)k}} = \frac{\partial W'_m}{\partial q_{(au)}^x}$$

soit en valeurs moyennes

$$(123) \quad (Q_u)_{em}^x = \frac{\partial W'_m}{\partial q_{(au)}}$$

Les circuits à commutation continue qu'on vient d'analyser s'identifient aux circuits à contacts glissants lorsqu'on fait le passage à la limite.

$$N \rightarrow \infty$$

$$\Delta t_c \rightarrow 0$$

A l'isolement entre rayons correspond alors une roue conductrice dont la résistivité transversale est beaucoup plus élevée que la résistivité longitudinale.

Il est intéressant de chercher dans l'analyse précédente les propriétés du modèle dynamique directement établi pour l'étude des circuits à contacts glissants, en adoptant le point de vue d'un observateur des variables externes et en le comparant à celui de l'observateur des phénomènes internes adopté dans l'analyse.

Pour cela, calculons une variation élémentaire d'énergie magnétique du système en reprenant le type de raisonnement utilisé pour établir les équations (117).

L'observateur des phénomènes internes écrit

$$(124) \quad dW_m^x = \sum_k j_{ak} d\psi_{ak} + \sum_{b \neq a} i_b^x d\psi_b^x - \sum_{u,k} \frac{\partial W_m^x}{\partial q_{(au)k}} dq_u^x$$

Par contre l'observateur des variables externes, écrira

$$(125) \quad dW_m^x = i_a^x d\psi_a^x + \sum_{b \neq a} i_b^x d\psi_b^x - \sum_u \frac{\partial W_m^x}{\partial q_{(au)}^x} dq_{(au)}^x$$

Les deux résultats sont exacts, mais celui de l'observateur des valeurs externes est moins complet.

En effet, en comparant à (124) on vérifie qu'il manque dans l'équation (125) le travail des forces électrodynamiques associé aux déplacements relatifs $(dq_u^x - dq_{(au)}^x)$ et le travail électrique $(\sum_k j_{ak} d\psi_{ak} - i_a^x d\psi_a^x)$.

Les travaux qui manquent constituent pour cet observateur des travaux de liaison, dont la somme est nulle, et qui n'interviennent pas dans le bilan de dW_m^x .

On retrouve ainsi les propriétés du modèle dynamique proposé.

b- Circuits à commutation discontinue.

C'est le type de circuits à commutation utilisé le plus couramment.

Les conducteurs sont filiformes et on ne peut pas chercher dans des courants élémentaires les effets mis en évidence pour les circuits à commutation continue. Ces effets sont dûs, maintenant, à des courants macroscopiques dont l'action est déterminée par les connexions spéciales du circuit.

b-1- Circuits fermés.

Ce sont les enroulements en tambour ou en anneau des machines à collecteur classique et qu'on peut aussi utiliser en commutation électronique.

Prenons comme exemple un enroulement en tambour, bipolaire diamétral à commutation "simple", avec un grand nombre de sections.

Le système se comporte inatamment comme formé de circuits filiformes, où il y a en plus du circuit principal, un circuit secondaire correspondant aux sections en commutation. En réalité, il y a deux sections en commutation mais lorsque le nombre de lames au collecteur est pair les deux sections sont équivalentes à une seule bobine de deux spires parcourue par le courant de commutation.

Soit Δt_c la période de commutation. Le courant de commutation s'inverse pendant cette période, soit naturellement soit forcé à la fin de la période. Il en résulte que la distribution des courants dans le circuit, vue des balais, est la même aux instants initial et final de la commutation.

Ce fait va ramener les équations du circuit, prises en valeur moyenne sur la période de commutation, aux équations d'un circuit à contacts glissants.

Désignons par i_a^x le courant instantané du circuit. La tension induite moyenne est

$$(126) \quad v_a = \frac{1}{\Delta t_c} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_c} \frac{d}{dt} \frac{\partial W'_m}{\partial i_a} dt$$

En utilisant les coordonnées instantanées $q_{(au)}^x$ et $q_{(au)c}$ concernant respectivement, le circuit principal et le circuit de commutation, on a

$$(127) \quad v_a = \frac{1}{\Delta t_c} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_c} \left(\sum_u \frac{\partial^2 W'_m}{\partial i_a^x \partial q_{(au)}^x} \dot{q}_u^x + \sum_u \frac{\partial^2 W'_m}{\partial i_a^x \partial q_{(au)c}} \dot{q}_u^x + \frac{\partial^2 W'_m}{\partial i_a^x \partial i_a^x} \frac{di_a^x}{dt} + \frac{\partial^2 W'_m}{\partial i_a^x \partial i_{(ac)}} \frac{di_{(ac)}}{dt} \right) dt$$

où on représente par $i_{(ac)}$ le courant de commutation.

Nous admettons que la période de commutation est suffisamment courte pour que les variations du courant i_a^x soient petites pendant le temps Δt_c . On peut alors exprimer la coénergie magnétique de l'équation (127) en fonction du courant moyen i_a pendant l'intervalle Δt_c et écrire :

$$(128) \quad v_a = \frac{1}{\Delta t_c} \frac{\partial}{\partial i_a} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_c} \left(\sum_u \frac{\partial W'_m}{\partial q_{(au)}^x} \dot{q}_u^x + \sum_u \frac{\partial W'_m}{\partial q_{(au)c}^x} \dot{q}_u^x + \frac{\partial W'_m}{\partial i_a} \frac{di_a^x}{dt} + \frac{\partial W'_m}{\partial i_{(ac)}} \frac{di_{(ac)}}{dt} \right) dt - \frac{\bar{\Psi}_{(ac)}}{\Delta t_c}$$

où on représente par $\bar{\Psi}_{(ac)}$ le flux moyen, à travers le circuit de commutation, pendant Δt_c .

Ce dernier terme résulte du fait que le courant $i_{(ac)}$ varie de $(-\frac{i_a}{2})$ à $(+\frac{i_a}{2})$ pendant la période Δt_c . La dernière intégrale de (127) se ramène ainsi à une intégrale dont les limites sont fonction de i_a .

L'intégrale qui figure en (128) représente la variation de coé-
nergie magnétique du système entre les instants t_0 et $t_0 + \Delta t_c$. Puisque
la configuration du circuit par rapport aux balais se reproduit, cette va-
riation ne sera due qu'à une variation de position des balais ou à une
différence entre les valeurs de i_a^x aux instants t_0 et $t_0 + \Delta t_c$.

On peut alors écrire, en utilisant des valeurs moyennes et en
négligeant l'énergie moyenne associée aux sections en commutation.

$$(129) \quad \Delta W_m^x = \sum_u \frac{\partial W_m'}{\partial q_{(au)}} \dot{q}_{(au)} \Delta t_c + \frac{\partial W_m'}{\partial i_a} \frac{di_a}{dt} \Delta t_c$$

où $q_{(au)}$ représente une coordonnée moyenne du circuit principal et $\dot{q}_{(au)}$ la
vitesse des balais.

Si on introduit (129) en (128), on obtient tout de suite

$$(130) \quad v_a = \frac{d\psi_a}{dt} - \frac{\bar{\Psi}_{(ac)}}{\Delta t_c}$$

où $\psi_a = \frac{\partial W_m'}{\partial i_a}$ représente le flux moyen à travers le circuit principal.

Le flux $\bar{\Psi}_{(ac)}$ constitue un flux balayé par le circuit principal
pendant la période Δt_c ; pour s'en rendre compte il suffit d'imaginer les
balais fixes et d'observer que $\bar{\Psi}_{(ac)}$ représente alors une variation de flux
à travers le circuit principal lorsque celui-ci occupe deux positions voisines
dans la même distribution de champ, ce qui correspond bien à un flux
balayé.

On conclut ainsi que l'équation (130) correspond à celle d'un
circuit à contacts glissants mais pour le confirmer complètement, calculons
 $\bar{\Psi}_{(ac)}$.

En comparant les termes figurant dans l'intégrale de l'expression
(126) à ceux de (129) qui représentent tous les deux la variation de la

coénergie magnétique pendant l'intervalle Δt_c , on obtient

$$(131) \quad \frac{1}{\Delta t_c} \int_{t_o}^{t_o + \Delta t_c} \frac{\partial W'_m}{\partial i_{(ac)}} \frac{di_{(ac)}}{dt} dt = - \sum_u (\dot{q}_u - \dot{q}_{(au)}) \frac{\partial W'_m}{\partial q_{(au)}}$$

D'autre part, en négligeant les pertes de commutation de même façon qu'on a négligé l'énergie moyenne associée aux sections en commutation, on peut écrire :

$$(132) \quad \frac{1}{\Delta t_c} \int_{t_o}^{t_o + \Delta t_c} \frac{\partial W'_m}{\partial i_{(ac)}} \frac{di_{(ac)}}{dt} dt = \frac{\bar{\Psi}_{(ac)}}{\Delta t_c} i_a$$

Les deux expressions précédentes permettent de calculer $\bar{\Psi}_{(ac)}$ qui, introduit en (130), donne

$$(133) \quad v_a = \frac{d\psi_a}{dt} + \sum_u \frac{\dot{q}_u - \dot{q}_{(au)}}{i_a} \frac{\partial W'_m}{\partial q_{(au)}}$$

L'expression de la force électrodynamique s'obtient sans difficulté, comme pour les circuits à commutation continue.

Le passage à la limite conduit à définir un circuit idéal

$$N \rightarrow \infty$$

$$\Delta t_c \rightarrow 0$$

Pourtant, il faut remarquer que ce circuit idéal n'est pas un circuit à contacts glissants. Il garde les caractéristiques du circuit réel en ce qui concerne le phénomène de commutation.

b-2- Circuits ouverts.

Ces circuits s'obtiennent à partir des circuits à commutation continue lorsque les balais ne sont en contact qu'avec un rayon à la fois. Il faut alors imaginer les balais très minces, de longueur inférieure à celle de l'isolement entre conducteurs.

En réalité ce type de circuit n'est pas utilisé en commutation mécanique mais trouve son application en commutation électronique.

Les équations instantanées sont celles d'un circuit filiforme. Il n'y a pas un courant de commutation indépendant du courant principal : c'est celui-ci qui change au cours de la période de commutation, puisqu'il doit être nul au début et à la fin de cette période.

Désignons par i_a^x le courant instantané et par i_a sa valeur moyenne pendant la période de commutation Δt_c .

La tension induite dans le circuit sera définie à partir de

$$(134) \quad v_a i_a = \frac{1}{\Delta t_c} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_c} v_a i_a^x dt = \frac{1}{\Delta t_c} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_c} i_a^x \frac{d\psi_a^x}{dt} dt$$

Choisissons t_0 de façon que $i_a^x = i_a$ (Fig. 7)

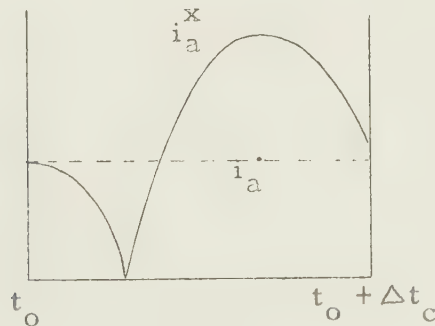


Fig.7

Pendant l'intervalle $(t_0, t_0 + \Delta t_c)$ la coénergie magnétique du système varie de :

$$(135) \quad \Delta W_m^x = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_c} \left(\frac{\partial W_m^x}{\partial i_a^x} \frac{di_a^x}{dt} + \sum_u \frac{\partial W_m^x}{\partial q_{(au)}^x} \dot{q}_u^x \right) dt$$

Si l'intervalle de commutation est petit (135) deviendra très sensiblement :

$$(136) \quad \Delta W'_m = \sum_u \frac{\partial W'_m}{\partial q_{(au)}} \dot{q}_{(au)} \Delta t_c + \frac{\partial W'_m}{\partial i_a} \frac{di_a}{dt} \Delta t_c$$

De (135) et (136), on déduit alors

$$(137) \quad \frac{1}{\Delta t_c} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_c} \psi_a^x \frac{di_a^x}{dt} dt = \sum_u \frac{\partial W'_m}{\partial q_{(au)}} (\dot{q}_{(au)} - \dot{q}_u) + \psi_a \frac{di_a}{dt}$$

où $\psi_a = \frac{\partial W'_m}{\partial i_a}$ représente le flux moyen à travers le circuit.

Si on intègre le premier membre de (137) par parties et qu'on introduise le résultat dans l'équation (134), on obtient :

$$(138) \quad v_a i_a = \sum_u (\dot{q}_u - \dot{q}_{(au)}) \frac{\partial W'_m}{\partial q_{(au)}} + i_a \frac{d\psi_a}{dt} - \frac{d}{dt} (\psi_a i_a) + \frac{\Delta(\psi_a^x i_a^x)}{\Delta t_c}$$

qui se ramène à l'équation

$$(139) \quad v_a = \frac{d\psi_a}{dt} + \sum_u \frac{\dot{q}_u - \dot{q}_{(au)}}{i_a} \frac{\partial W'_m}{\partial q_{(au)}}$$

Le résultat obtenu est d'autant plus rigoureux que l'allure du courant i_a^x se rapproche plus de la forme rectangulaire.

La différence entre la tension v_a et la valeur moyenne de v_a^x réalise un travail que nous pouvons regarder comme un travail de commutation. Si ce travail est négligé, l'équation (139) peut être considérée comme une équation de valeurs moyennes, comme c'est le cas pour les autres circuits à commutation.

b-3- Modèle dynamique.

Nous venons de voir que si on néglige le travail de commutation, les machines à commutation s'intègrent, en valeurs moyennes, dans le modèle dynamique des circuits à contacts glissants.

L'analyse précédente est alors équivalente à établir les conditions de travail virtuel nul des forces de liaisons internes.

Dans les circuits à commutation cette condition est inhérente au seul fait que la configuration du circuit se répète avec la fréquence de commutation.

Pour le vérifier considérons le cas des circuits fermés, en admettant que $i_a^x = i_a = C^t$ et $\dot{q}_u^x = \dot{q}_u = C^t$.

L'étude de la variation de la coénergie magnétique - éqs (128) et (129) - permet d'écrire

$$(140) \quad \frac{1}{\Delta t_c} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_c} \left(\sum_u \frac{\partial W'_m}{\partial q_{(au)}^x} \dot{q}_u + \frac{\partial W'_m}{\partial i_{(ac)}} \frac{di_{(ac)}}{dt} \right) dt = \sum_u \frac{\partial W'_m}{\partial q_{(au)}} \dot{q}_{(au)}$$

qui traduit précisément que le travail du couple moyen avec la vitesse $\dot{q}_u - \dot{q}_{(au)}$ compense le travail de la tension induite associée au glissement entre le système mécanique et les balais.

L'équation précédente pourra ainsi servir directement de base pour la recherche d'un circuit à contacts glissants équivalent au circuit réel. Cette recherche sera surtout importante pour étudier les circuits fermés comportant un nombre très réduit de sections.

En ce qui concerne les circuits ouverts, les équations (135) et (136) permettent d'obtenir les mêmes conclusions.

3.2 - Éléments à couplage électrostatique.

Nous distinguerons deux types de systèmes à couplage électrostatique.

Dans le premier type, qui sont les condensateurs normaux, le système électrique (distribution de charges) est supposé accompagner la matière dans son mouvement et se déformer avec elle, s'il y a lieu. De tels systèmes sont duals des circuits filiformes.

Un deuxième type est constitué par des machines électrostatiques à contacts glissants qui, comme on verra, sont les duals des circuits à contacts glissants.

3.2.1 - Condensateurs et diélectriques.

Considérons d'abord un condensateur indéformable ou déformable, c'est-à-dire dont les armatures sont rigidement liées ou non. C'est le cas des condensateurs statiques normaux et des rares machines électrostatiques à courant alternatif.

Désignons par q_u et $q_{(au)}$ les coordonnées géométriques du système, dont la définition est analogue à celle donnée pour les circuits électriques.

Les coordonnées électriques du système sont la charge dynamique aux terminaux du condensateur $q_a = \int_0^t i_a dt$ et la charge statique du condensateur $q_{(as)}$.

Les conditions de liaison électromécaniques du système sont

$$(141) \quad \dot{q}_{(au)} = \dot{q}_u$$

$$(142) \quad \dot{q}_{(as)} = \dot{q}_a$$

Les forces de liaison ^{de} nature mécanique R_u et $R_{(au)}$ obéissent au principe d'égalité d'action et de réaction.

De même pour les forces de liaison électriques R_{as} et $R_{(as)}$ qui résultent simplement d'une liaison galvanique.

Les conditions de travail virtuel nul sont

$$(143) \quad \delta q_u - \delta q_{(au)} = 0$$

$$(144) \quad \delta q_a - \delta q_{(as)} = 0$$

L'énergie électrostatique du système est fonction des coordonnées $q_{(as)}$ et $q_{(au)}$. Les équations lagrangiennes de mouvement deviennent alors

$$(145-a) \quad 0 = Q_a + \lambda_{(as)}$$

$$(145-b) \quad \frac{\partial V_E}{\partial q_{(as)}} = -\lambda_{(as)}$$

$$(145-c) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L_M}{\partial \dot{q}_u} - \frac{\partial L_M}{\partial q_u} = Q_u + \lambda_{(au)}$$

$$(145-c) \quad \frac{\partial V_E}{\partial q_{(au)}} = -\lambda_{(au)}$$

Si on élimine les multiplicateurs, on obtient

$$(146-a) \quad 0 = Q_a - \frac{\partial V_E}{\partial q_{(as)}}$$

$$(145-b) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L_M}{\partial \dot{q}_u} - \frac{\partial L_M}{\partial q_u} = Q_u - \frac{\partial V_E}{\partial q_{(au)}}$$

qui avec les conditions de liaison (141) (142) déterminent le mouvement du système.

La comparaison des conditions de travail virtuel nul avec les conditions de liaison, montre que le système est holonome. On peut s'en servir pour éliminer les variables $q_{(au)}$ et $q_{(as)}$.

Les équations de mouvement viennent alors

$$(147-a) \quad 0 = Q_{a'} - \frac{\partial V'_E}{\partial q_{a'}}$$

$$(147-b) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L'_M}{\partial \dot{q}_{u'}} - \frac{\partial L'_M}{\partial q_{u'}} = Q_{u'} - \frac{\partial V'_E}{\partial q_{u'}}$$

L'équation mécanique (147-b) est applicable au cas où la coordonnée q_u , repère la position d'un corps diélectrique.

Ecrites avec les notations habituelles, les équations (147) deviennent :

$$(148-a) \quad v_a = \frac{\partial W_e}{\partial \tilde{q}_a}$$

$$(148-b) \quad (Q_u)_{em} = - \frac{\partial W_e}{\partial q_u}$$

qui sont les équations classiques des systèmes à couplage électrique.

3.2.2. - Machines électrostatiques à contacts glissants.

On prend comme exemple la machine à courroie représentée schématiquement dans la Fig. 8.

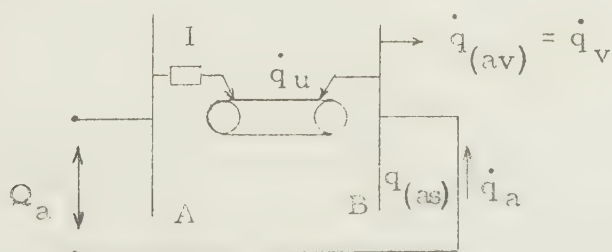


Fig. 8

Le système comprend un condensateur indéformable, d'armatures A et B, repérées par les coordonnées q_u .

La charge du condensateur est $q_{(as)}$ et les coordonnées géométriques correspondantes $q_{(av)}$. Ces coordonnées sont soumises aux liaisons

$$(149) \quad q_{(av)} = q_v$$

Il y a aussi un système de transport de charges par convection qui comprend :

- un ionisateur I ;
- un peigne collecteur et un peigne ionisateur, supposés séparés par un intervalle fixe et repérés dans l'espace par des coordonnées $q_{(au)}$;
- une courroie de transport de charges, dont la partie utile est repérée par des coordonnées q_u de même nature que les $q_{(au)}$.

Il y a un glissement interne : $\dot{q}_{(au)} \neq \dot{q}_u$. Les coordonnées $q_{(au)}$ sont à définir en fonction des coordonnées des armatures du condensateur indéformable.

Alors, on aura les conditions de liaison

$$(150) \quad q_{(au)} = q_{(au)}(q_v)$$

qui contiennent comme un cas particulier les (149)

Les phénomènes sont supposés suffisamment lents pour qu'on puisse substituer à la distribution réelle de charges sur la courroie une distribution uniforme. De cette façon les coordonnées $q_{(au)}$ suffisent pour définir la configuration électrique du système.

Les coordonnées électriques du système sont la charge statique $q_{(as)}$ et la charge dynamique aux terminaux q_a .

A l'inverse de ce qui arrive dans les condensateurs normaux, ces deux coordonnées sont indépendantes : $\dot{q}_{(as)} \neq \dot{q}_a$. Ceci est du à l'existence d'un courant de convection **intérieur**.

Il y a une condition de liaison interne qui nous permet de définir $\dot{q}_a$ en fonction des autres variables.

Supposons d'abord que la densité de charge sur la courroie est déterminée seulement par le système d'ionisation.

Dans ce cas on a une relation immédiate:

$$(151) \quad \dot{q}_a - \dot{q}_{(as)} = K (\dot{q}_u - \dot{q}_{(au)})$$

où K dépend de la densité de charge sur la courroie.

Considérons une hypothèse plus générale où la charge sur la courroie peut dépendre des autres variables du système, notamment la charge statique $q_{(as)}$.

Pour établir la forme générale de (151) on se servira du fait que l'énergie électrostatique du système ne peut pas être modifiée par le jeu des vitesses relatives $(\dot{q}_u - \dot{q}_{(au)})$ et $(\dot{q}_a - \dot{q}_{(as)})$. C'est à dire que l'on a toujours :

$$(152) \quad \sum_u \frac{\partial V_E}{\partial q_{(au)}} (\dot{q}_u - \dot{q}_{(au)}) + \frac{\partial V_E}{\partial q_{(as)}} (\dot{q}_a - \dot{q}_{(as)}) = 0$$

Cette relation peut être directement interprétée.

Le premier terme représente la variation d'énergie électrostatique du système qui serait produite par le déplacement de l'ensemble de charges sur la courroie, s'il n'y avait pas de contacts glissants. A ce phénomène correspondrait une variation de charge statique sur le condensateur.

Mais, grâce au système d'ionisation et aux contacts glissants, une charge égale et opposée à la précédente s'écoule sur la courroie, ce qui ramène l'énergie et la charge statique à leur valeur initiale : c'est la signification du deuxième terme.

Remarquons encore que la relation (152) traduit aussi la conservation de l'énergie interne du système.

L'équation (152) établit bien une relation de dépendance entre les variables. En effet $\dot{q}_a$ et q_a n'intervenant pas dans la définition de V_E , la relation détermine $\dot{q}_a$ en fonction des autres variables du système.

Une fois établies les conditions de liaison (150) et (152), cherchons les conditions de travail virtuel nul des forces de liaison.

Pour que les conditions (150) soient vérifiées, il faut que s'exercent sur la distribution des charges des forces de liaison mécaniques capables de maintenir la distribution en équilibre dans la position désirée, malgré l'existence de forces électrostatiques. De telles forces de liaison proviennent du système mécanique et obéissent au principe d'égalité d'action et de réaction :

$$(153) \quad R_{(au)} + R_u = 0$$

Les conditions de liaison (150) impliquent un travail des forces de liaison mécaniques, mais ce travail n'engendre pas une force de liaison électrique, comme dans les circuits à contacts glissants. En effet, les tensions d'origine électrostatique ne sont pas associées au mouvement de la matière.

Les conditions de travail virtuel nul sont seulement

$$(154) \quad \delta q_u - \delta q_{(au)} = 0$$

La condition de liaison (152) fait intervenir, en plus des forces de liaison mécaniques, les forces de liaisons électriques.

L'existence d'une charge statique $q_{(as)}$ implique une force de liaison électrique $R_{(as)}$ qui la maintienne en équilibre, malgré la mobilité des charges. Une telle force provient du circuit extérieur et est d'origine galvanique. Elle obéit au principe d'égalité d'action et de réaction :

$$(155) \quad R_{(as)} + (R_{as}) = 0$$

Ces forces de liaison sont indépendantes des forces de liaison mécaniques et il leur correspond une nouvelle condition de travail virtuel nul :

$$(156) \quad \delta q_a - \delta q_{(as)} = 0$$

La méthode des multiplicateurs de Lagrange permet d'établir les équations

$$(157-a) \quad 0 = Q_a + \lambda_{(as)}$$

$$(157-b) \quad \frac{\partial V_E}{\partial q_{(as)}} = -\lambda_{(as)}$$

$$(157-c) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L_M}{\partial \dot{q}_u} - \frac{\partial L_M}{\partial q_u} = Q_u + \lambda_{(au)}$$

$$(157-d) \quad \frac{\partial V_E}{\partial q_{(au)}} = -\lambda_{(au)}$$

qui, associées aux conditions de liaison (150) et (152), déterminent le mouvement et les forces de liaison.

Si on élimine les multiplicateurs de Lagrange, le mouvement est alors déterminé par les équations :

$$(158-a) \quad 0 = Q_a - \frac{\partial V_E}{\partial q_{(as)}}$$

$$(158-b) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L_M}{\partial \dot{q}_u} - \frac{\partial L_M}{\partial q_u} = Q_u - \frac{\partial V_E}{\partial q_{(au)}}$$

$$(158-c) \quad q_{(au)} = q_{(au)}(q_v)$$

$$(158-d) \quad (\dot{q}_a - \dot{q}_{as}) \frac{\partial V_E}{\partial q_{(as)}} = - \sum_u (\dot{q}_u - \dot{q}_{(au)}) \frac{\partial V_E}{\partial q_{(au)}}$$

Ces équations contiennent comme un cas particulier celles des condensateurs normaux, pour qui (158-c) devient

$$\dot{q}_{(au)} = \dot{q}_u$$

et (158-d) donne alors :

$$\dot{q}_{(as)} = \dot{q}_a$$

Si on adopte les notations habituelles, les équations (158) s'écrivent:

$$(159-a) \quad 0 = v_a - \frac{\partial W_e}{\partial \tilde{q}_a}$$

$$(159-b) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L_M}{\partial \dot{q}_u} - \frac{\partial L_M}{\partial q_u} = Q_u - \frac{\partial W_e}{\partial q_{(au)}}$$

$$(159-c) \quad q_{(au)} = q_{(au)}(q_v)$$

$$(159-d) \quad \left(i_a - \frac{d\tilde{q}_a}{dt} \right) \frac{\partial W_e}{\partial \tilde{q}_a} = - \sum_u (\dot{q}_u - \dot{q}_{(au)}) \frac{\partial W_e}{\partial q_{(au)}}$$

qu'on interprète directement à partir de l'électromagnétisme.

3.3 - Equations générales.

Dans l'analyse précédente nous avons considéré successivement le couplage magnétique et le couplage électrostatique, en séparant en outre les équations électriques des équations mécaniques.

Bien que les résultats obtenus soient ceux qu'on utilisera directement dans la résolution d'un problème concret, nous avons intérêt à trouver une forme générale pour les équations de mouvement.

De plus dans cette formulation générale nous ferons intervenir la dissipation du système, négligée jusqu'à maintenant.

Désignons par q_j ($j = 1, \dots, n$) les n coordonnées électriques q_a et mécaniques q_u du système et par $q_{(n+x)}$ ($x = 1, \dots, m$) les m coordonnées $q_{(au)}$ et $q_{(as)}$.

Soit encore $q_\alpha, q_\beta, \dots$ une coordonnée quelconque du système.

Les conditions de liaison électromécanique du système se traduisent par m relations.

$$(160) \quad f_i(\dot{q}_\gamma, q_\gamma, t) = 0 \quad i = 1, \dots, m$$

A chaque coordonnée $q_{(n+x)}$ s'associe une condition de travail virtuel nul des forces de liaison

$$(161) \quad \sum_{\gamma=1}^{n+m} A_{x\gamma} \delta q_\gamma = 0 \quad x = 1, \dots, m$$

Compte tenu du fait que

$$(162) \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{(n+x)}} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_{(n+x)}} = 0 \quad Q_{(n+x)} = 0$$

les multiplicateurs de Lagrange correspondants aux conditions (161) sont

$$(163) \quad \lambda_x = - \frac{1}{A_{x(n+x)}} \frac{\partial L}{\partial q_{(n+x)}}$$

Les équations lagrangiennes de mouvement deviennent alors :

$$(164) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\gamma} - \frac{\partial L}{\partial q_\gamma} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_\gamma} = Q_\gamma - \sum_{x=1}^m \frac{A_{x\gamma}}{A_{x(n+x)}} \frac{\partial L}{\partial q_{(n+x)}} \\ \gamma = 1, \dots, n+m$$

Ces équations sont une identité pour $\gamma = n+1, \dots, n+m$, les coordonnées $q_{(n+x)}$ étant à déterminer à partir des conditions (160).

Le mouvement du système est alors régi par

$$(165-a) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} = Q_j - \sum_{x=1}^m \frac{A_{xj}}{A_{x(n+x)}} \frac{\partial L}{\partial q_{(n+x)}}$$

$$j = 1, \dots, n$$

$$(165-b) \quad f_i(\dot{q}_\gamma, q_\gamma, t) = 0 \quad \gamma = 1, \dots, n+m$$

$$i = 1, \dots, m$$

Ces équations constituent la forme générale recherchée et contiennent comme cas particulier les équations trouvées précédemment.

En utilisant des méthodes analogues à celles vues dans le chapitre "techniques analytiques" il est formellement possible de transformer les équations de mouvement de façon que les forces de liaison n'interviennent plus explicitement.

Pour cela définissons une transformation des vitesses généralisées

$$(166) \quad dq_{j'} = dq_j \quad j, j' = 1, \dots, n$$

$$dq_{(n+x)'} = \sum_{\gamma=1}^{n+m} A_{x\gamma} dq_\gamma \quad x = 1, \dots, m$$

$$\gamma = 1, \dots, n+m$$

les coefficients $A_{x\gamma}$ étant tirés des relations (161).

Désignons par $C_{\beta'\gamma}$, les éléments de la matrice non singulière de la transformation (166) et par $C_{\gamma\beta'}$, les éléments de la transformation inverse. Soient encore

$$(167-a) \quad L'(\dot{q}_{\beta'}, q_\gamma, t) = L(\dot{q}_\gamma, q_\gamma, t)$$

$$(167-b) \quad F'(\dot{q}_{\beta'}, q_\gamma, t) = L(\dot{q}_\gamma, q_\gamma, t)$$

les fonctions lagrangéenne et de dissipation exprimées en fonction des nouvelles vitesses et des anciennes coordonnées.

Si on applique la transformation (166) aux équations (164), on obtient, en désignant par R_γ les forces de liaison

$$(168) \quad \frac{d}{dt} \left(\sum_{\beta'=1}^{n+m} C_{\beta'\gamma} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_{\beta'}} \right) - \frac{\partial L'}{\partial q_\gamma} - \sum_{\beta'=1}^{n+m} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_{\beta'}} \frac{\partial \dot{q}_{\beta'}}{\partial q_\gamma} + \\ + \sum_{\beta'=1}^{n+m} C_{\beta'\gamma} \frac{\partial F'}{\partial \dot{q}_{\beta'}} = Q_\gamma + R_\gamma \quad \gamma = 1, \dots, n+m$$

Les coordonnées q_γ n'interviennent pas dans les coefficients $A_{x\gamma}$.

Alors

$$(169) \quad \frac{\partial \dot{q}_{\beta'}}{\partial q_\gamma} = 0$$

De plus, puisque les vitesses $\dot{q}_{(n+x)}$ ne figurent pas dans la définition des fonctions L et F celles-ci s'expriment en fonction des $\dot{q}_{\beta'}$, q_γ exactement comme en fonction des $\dot{q}_\gamma$, q_γ . Alors,

$$(170) \quad \frac{\partial C_{\beta'\gamma}}{\partial t} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_{\beta'}} = 0$$

puisque l'un des deux facteurs est toujours nul.

Les équations (168) deviennent alors

$$(171) \quad \sum_{\beta'=1}^{n+m} C_{\beta'\gamma} \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_{\beta'}} - \frac{\partial L'}{\partial q_\gamma} + \sum_{\beta'=1}^{n+m} \frac{\partial F'}{\partial \dot{q}_{\beta'}} = Q_\gamma + R_\gamma \quad \gamma = 1, \dots, n+m$$

qui peuvent encore être transformées en

$$(172) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_\gamma} - \sum_{\delta=1}^{n+m} C_{\gamma\delta'} \frac{\partial L'}{\partial q_\gamma} + \frac{\partial F'}{\partial \dot{q}_{\delta'}} = \sum_{\delta=1}^{n+m} C_{\gamma\delta'} Q_\gamma + \sum_{\delta=1}^{n+m} C_{\gamma\delta'} R_\gamma \\ \delta' = 1, \dots, n+m$$

par la technique déjà utilisée - équ. (51)

Puisque le travail virtuel des liaisons est nul par $\delta q_{(n+x)} = 0$, les forces de liaison seront nulles selon les coordonnées $q_{j'}$, ($j' = 1, \dots, n$) soit :

$$(173) \quad \sum_{\gamma} C_{\gamma j'} R_{\gamma} = 0$$

Les n équations lagrangiennes selon les coordonnées $q_{j'}$ sont alors

$$(174) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_{j'}} - \frac{\partial L'}{(\partial q)_{j'}} + \frac{\partial F'}{\partial \dot{q}_{j'}} = Q_{j'} \quad j' = 1, \dots, n$$

où on adopte une notation de la dynamique des systèmes non holonomes, en posant

$$(175) \quad \frac{\partial L'}{(\partial q)_{j'}} = \sum_{\gamma=1}^{n+m} C_{\gamma j'} \frac{\partial L'}{\partial q_{\gamma}}$$

Puisque les forces appliquées $Q_{(n+x)}$ sont nulles

$$(176) \quad Q_{j'} = \sum_{\gamma=1}^{n+m} C_{\gamma j'} Q_{\gamma} = C_{jj'} Q_j = Q_j$$

Il en résulte que les équations (174) peuvent être directement appliquées au système. Nous pouvons alors abandonner la différence de notation pour les q_j dans les deux systèmes en écrivant directement les équations

$$(177) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{(\partial q)_j} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} = Q_j \quad j = 1, \dots, n$$

qui associées aux conditions (160) déterminent le mouvement.

Dans les cas particuliers où les liaisons (160) deviennent holonomes, il est possible de définir de vraies coordonnées $q_{\beta'}$ et, d'après la démonstration faite dans le chapitre I, il vient

$$(178) \quad \frac{\partial L}{(\partial q)_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

Les équations (177) deviennent alors

$$(179) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} = Q_j \quad j = 1, \dots, n$$

qui sont les équations de Lagrange déterminant complètement le mouvement.

On retombe ainsi dans le modèle dynamique de Maxwell.

3.4 - Dualité

L'étude précédente permet d'effectuer la généralisation du concept de dualité aux circuits et condensateurs à contacts glissants.

Considérons d'abord un circuit électrique b, à contacts glissants et adoptons la correspondance de variables électriques suivante, vis à vis de l'analyse dynamique effectuée, où le signe $\sim$ indique l'équivalence

$$\begin{aligned}
 \psi_b &\sim q_{(as)} \\
 \int v_b dt &\sim q_a \\
 (180-a) \quad \frac{d\psi_b}{dt} &\sim \dot{q}_{(as)} \\
 v_b &\sim \dot{q}_a \\
 i_b &\sim Q_a \\
 W_m(\psi_b, q_{(au)}) &\sim V_E(q_{(as)}, q_{(au)})
 \end{aligned}$$

Les équations (158) établies pour les condensateurs à contacts glissants s'écrivent alors

$$(181-a) \quad 0 = i_b - \frac{\partial W_m}{\partial \psi_b}$$

$$(181-b) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L_M}{\partial \dot{q}_u} - \frac{\partial L_M}{\partial q_u} = Q_u - \frac{\partial W_m}{\partial q_{(au)}}$$

$$(181-c) \quad \left(v_b - \frac{d\psi_b}{dt} \right) \frac{\partial W_m}{\partial \psi_b} = - \sum_u (\dot{q}_u - \dot{q}_{(bu)}) \frac{\partial W_m}{\partial q_{(bu)}}$$

$$(181-d) \quad q_{(bu)} = q_{(bu)} q_v$$

Les équations coïncident avec celles obtenues directement pour les circuits à contacts glissants, avec l'analogie de Maxwell - équations (86). On remarquera, pour cela, que [26] .

$$(182) \quad \left[\frac{\partial W_m}{\partial q_{(bu)}} \right]_{\psi = c^t} = - \left[\frac{\partial W'_m}{\partial q_{(bu)}} \right]_{i = c^t}$$

Le résultat précédent montre que les circuits inductifs et condensateurs à contacts glissants sont des éléments duals avec la correspondance de variables (180-a).

Le courant de convection d'un condensateur à contacts glissants joue le rôle de la f.e.m. de glissement dans les circuits à contacts glissants. La charge électrique sur la courroie est alors équivalente au flux à travers les sections en commutation d'un enroulement fermé, c'est-à-dire, au flux balayé pendant l'intervalle de commutation.

De la même façon que, dans une machine à commutation, nous pouvons commander le flux moyen à travers les sections en commutation par l'excitation, dans les machines électrostatiques nous commandons la charge sur la courroie par l'ionisation. Il en résulte que la machine électrostatique est essentiellement un générateur de courant, alors que la machine à commutation est un générateur de tension.

Sous d'autres points de vue, tels que distribution des efforts d'action et de réaction, les machines à courroie rejoignent la roue de Barlow.

Reprenons maintenant l'analyse à l'envers en considérant un condensateur b à contacts glissants, et en adoptant le correspondance de variables (180-a) à laquelle on ajoute

$$(180-b) \quad W'_e(v_b, q_{(bu)}) \sim T_{cE}(\dot{q}_a, q_{(au)})$$

Les équations (85), (71) des circuits à contacts glissants, d'après l'analogie de Maxwell, permettent d'écrire

$$(183-a) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial W'_e}{\partial v_b} = i_b - \sum_u \frac{\dot{q}_u - \dot{q}_{(bu)}}{v_b} \frac{\partial W'_e}{\partial q_{(bu)}}$$

$$(183-b) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L_M}{\partial \dot{q}_u} - \frac{\partial L_M}{\partial q_u} = Q_u + \frac{\partial W'_e}{\partial q_{(bu)}}$$

$$(183-c) \quad q_{(bu)} = q_{(bu)}(q_v)$$

Si on tient compte de [26]

$$(184) \quad \left[\frac{\partial W'_e}{\partial q_{(bu)}} \right]_{v=c}^t = - \left[\frac{\partial W_e}{\partial q_{(bu)}} \right]_{\tilde{q}=c}^t$$

et de ce que on a par définition

$$(185) \quad \frac{\partial W'_e}{\partial v_b} = \tilde{q}_b \quad ; \quad \frac{\partial W_e}{\partial \tilde{q}_b} = v_b$$

on vérifie que les équations (183) coïncident avec les équations (158) des condensateurs à contacts glissants.

Nous pouvons maintenant établir la correspondance de variables pour les analogies de Darrieus et de Maxwell, dans le cas général (TABLEAU III).

TABLEAU III

variable lagrangéenne	nature de la variable dans l'analogie de Maxwell	nature de la variable dans l'analogie de Darrieus
$q_\alpha = \int \dot{q}_\alpha dt$	charge dynamique	sans désignation
$q_{(\alpha s)}$	charge électrostatique ($\tilde{q}$)	flux magnétique (ψ)
$\dot{q}_\alpha$	courant de conduction (i)	tension (v)
$\dot{q}_{(\alpha s)}$	sans désignation	sans désignation
Q_α	tension (v)	courant de conduction (i)
P_α	flux magnétique (ψ)	charge électrostatique ($\tilde{q}$)
$T_{cE}(\dot{q}_\alpha, t)$	coénergie magnétique (W'_m)	coénergie électrostatique (W'_c)
$V_E(q_\alpha, t)$	énergie électrostatique (W_c)	énergie magnétique (W_m)

Dans ce tableau figurent des variables qui ne sont pas considérées dans la théorie dynamique classique des réseaux, puisque cette théorie ne tient pas compte des systèmes à contacts glissants.

Avec les variables du tableau III les équations générales (177) sont alors applicables, quelle que soit l'analogie utilisée.

Dans le cas particulier des systèmes sans contacts glissants,

on a

$$(186) \quad q_{(\alpha s)} = q_\alpha + K_s ; \dot{q}_{(\alpha s)} = \dot{q}_\alpha$$

qui correspond à l'équation (31).

On peut alors exprimer les variables $q_{(\alpha s)}$ en fonction des q_α , ce qui réduit le TABLEAU III au TABLEAU II, et utiliser comme équations de mouvement les équations de Lagrange.

4 - LIAISONS ELECTRIQUES MECANQUES ET D'ASSERVISSEMENT

Lorsque les éléments électromécaniques sont soumis à des liaisons externes, électriques, mécaniques ou d'asservissement, les méthodes d'étude précédentes restent applicables.

Les équations de mouvement auront toujours la forme générale (40) où figureront simultanément les forces de liaison externes et les forces de liaison internes des éléments électromécaniques.

D'après les résultats établis dans le chapitre I, si les liaisons externes sont holonomes, il est possible de réduire à priori le nombre de variables et de n'effectuer que l'étude des liaisons internes des systèmes électromécaniques. Dans ce cas, les équations du réseau gardent simplement la forme générale (177).

Un exemple important est celui de l'accouplement mécanique rigide de plusieurs éléments, comme les circuits électriques et l'armature d'une machine électrique. Si on élimine les coordonnées mécaniques dépendantes les équations déjà vues sont applicables mais on trouvera alors selon les coordonnées mécaniques plusieurs forces électromagnétiques. Nous considérerons plus en détail cet aspect dans la troisième partie de ce travail.

Si nous ne voulons ou ne pouvons pas éliminer à priori, des variables dépendantes à l'aide des liaisons externes, il est possible d'étudier d'abord les liaisons internes et de ne considérer qu'après les liaisons externes.

C'est l'hypothèse qui nous intéresse par la suite. Soient

$$(187) \quad f_1(\dot{q}_j, q_j, t) = 0 \quad l = 1, \dots, p$$

les conditions de liaison externes et

$$(188) \quad \sum_{j=1}^n A_{yj} \delta q_j = 0 \quad y = 1, \dots, p$$

les conditions de travail virtuel nul correspondantes.

Nous allons montrer que les équations lagrangiennes du mouvement sont alors

$$(189) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \left(\frac{\partial L}{\partial q} \right)_j + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} = Q_j + \sum_{y=1}^p \lambda_y A_{yj}$$

$j = 1, \dots, n$

qui avec les conditions (160) est (187) déterminent le mouvement.

Reprenons les équations (171).

Compte tenu des liaisons externes, ces équations deviennent

$$(190) \quad \sum_{\beta'=1}^{n+m} C_{\beta'\gamma} \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_{\beta'}} - \frac{\partial L'}{\partial q_{\gamma}} + \sum_{\beta'=1}^{n+m} \frac{\partial F'}{\partial \dot{q}_{\beta'}} = Q_{\gamma} + R_{\gamma} + \sum_{y=1}^p \lambda_y A_{y\gamma}$$

$\gamma = 1, \dots, n+m$

avec

$$(191) \quad A_{y\gamma} = 0 \quad \text{si } \gamma \neq h \quad (h = 1, \dots, n)$$

Elles peuvent aussi s'écrire :

$$(192) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_{j'}} - \left(\frac{\partial L'}{\partial q} \right)_{j'} + \frac{\partial F'}{\partial \dot{q}_{j'}} = Q_{j'} + \sum_y \sum_{\gamma} C_{\gamma j'} \lambda_y A_{y\gamma}$$

$j' = 1, \dots, n$

Mais

$$(193) \quad C_{\gamma j'} = \delta_{j'}^{\gamma} \quad \begin{matrix} j' = 1, \dots, n \\ \gamma = 1, \dots, n+m \end{matrix}$$

alors

$$(194) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_{j'}} - \frac{\partial L'}{(\partial q)_{j'}} + \frac{\partial F'}{\partial q_{j'}} = Q_{j'} + \sum_y \lambda_y A_{yj}$$

$j, j' = 1, \dots, n$

qui coïncident avec les équations (189).

Ces équations sont indépendantes de l'analogie adoptée et constituent les équations générales d'un réseau électromécanique.

Les liaisons électriques et mécaniques qu'on rencontre le plus couramment sont holonomes. En plus, les coefficients A_{yj} des relations (188) sont généralement des constantes : c'est notamment le cas des liaisons galvaniques simples, où ils valent + 1, - 1 ou 0. Nous verrons dans la troisième partie l'avantage qu'on peut en tirer.

Les liaisons d'asservissement sont un autre type important de liaisons.

Un système asservi peut être avant tout considéré comme un réseau soumis à un certain nombre de liaisons électriques et mécaniques.

Pourtant, fréquemment, nous n'avons pas besoin de traiter explicitement les organes d'asservissement, qui mettent en jeu des quantités d'énergie très inférieures à celles du système asservi. Et nous préférons tenir compte directement du résultat de l'asservissement sans analyser la façon dont les liaisons internes du système s'arrangent pour réaliser cet asservissement.

Ce point de vue se traduit dynamiquement en imposant au mouvement une condition de liaison, dite "liaison d'asservissement" qui traduit la fonction à remplir par le système.

Les liaisons d'asservissement constituent en général des liaisons de deuxième espèce et les méthodes décrites précédemment sont utilisables pour leur étude.

Une analyse détaillée de différents cas qui peuvent se présenter est faite par Béghin [12] .

Nous voulons ajouter seulement un cas qui se présentera fréquemment en électromécanique et qui n' a pas été considéré, directement , par Béghin.

C'est le cas où l'asservissement se réalise sur une variable non dynamique, c'est à dire; où la liaison d'asservissement ne se traduit pas directement par une relation entre les coordonnées ou vitesses du système.

En pareil cas, nous sommes obligés de traduire d'abord la liaison d'asservissement donnée par une ou plusieurs liaisons entre les coordonnées et vitesses du système et de ne réaliser qu'ensuite son étude dynamique. Nous en présenterons un exemple dans la troisième partie du travail.

PARTIE III

APPLICATIONS

- * - * - * -

1 - ANALYSE MATRICIELLE DES MACHINES ELECTRIQUES

Quand les machines électriques sont linéaires, il est commode d'utiliser la notation matricielle pour les équations de fonctionnement. En plus de la simplicité d'écriture, l'analyse matricielle dispose de techniques qui facilitent beaucoup en général, l'intégration des équations.

Les équations matricielles des machines à circuits filiformes (machines synchrones et asynchrones) sont connues depuis longtemps. Ce n'est pas le cas des machines à commutation dont les équations matricielles n'étaient obtenues que dans certains cas très spéciaux qui ne correspondaient d'ailleurs pas à ceux rencontrés dans la pratique.

Les résultats dynamiques établis nous conduisent à des équations matricielles tout à fait générales, comme nous avons montré dans une publication précédente [23] .

Considérons les équations (85). Si on tient compte de la dissipation et encore du fait que plusieurs circuits sont distribués sur une même armature ferromagnétique ces équations deviennent

$$(195) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T_{cE}}{\partial \dot{q}_a} + \frac{\partial F_E}{\partial \dot{q}_a} = Q_a - \sum_u \frac{\dot{q}_u - \dot{q}_{(au)}}{\dot{q}_a} \frac{\partial T_{cE}}{\partial q_{(au)}}$$

$$(196) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L_M}{\partial \dot{q}_u} - \frac{\partial L_M}{\partial q_u} + \frac{\partial F_M}{\partial \dot{q}_u} = Q_u + \sum_a \frac{\partial T_{cE}}{\partial q_{(au)}} + \frac{\partial T_{cE}}{\partial q_u}$$

Commençons par analyser les équations électriques, en adoptant les notations habituelles. Soient

$$(197) \quad v'_a = \frac{\partial F_E}{\partial i_a}; v''_a = \frac{d}{dt} \frac{\partial W'_m}{\partial i_a} = \frac{d\psi_a}{dt}; v'''_a = \sum_u \frac{\dot{q}_u - \dot{q}_{(au)}}{i_a} \frac{\partial W'_m}{\partial q_{(au)}}$$

et V' , V'' , V''' les matrices colonnes de tensions v'_a , v''_a et v'''_a .

Si on introduit la matrice de résistance $\mathcal{R}$ on peut écrire

$$(198) \quad \mathcal{V}' = \mathcal{R} \mathcal{J}$$

en désignant par $\mathcal{J}$ la matrice colonne de courant.

Représentons par $\mathcal{L}$ la matrice inductance du système, dont les éléments sont fonction de q_u et de $q_{(au)}$. Le produit $\mathcal{L} \mathcal{J}$ représente la matrice de flux et on peut écrire

$$(199) \quad \mathcal{V}'' = \frac{d}{dt} (\mathcal{L} \mathcal{J})$$

soit en développant

$$(200) \quad \begin{aligned} \mathcal{V}'' &= \mathcal{L} \frac{d\mathcal{J}}{dt} + \sum_u \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_u} \mathcal{J} \dot{q}_u + \sum_{u,a} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{(au)}} \mathcal{J} \dot{q}_{(au)} \\ &= \mathcal{L} \frac{d\mathcal{J}}{dt} + \sum_u \rho_u \mathcal{J} \dot{q}_u + \sum_{u,a} \mathcal{H}_{(au)} \mathcal{J} \dot{q}_{(au)} \end{aligned}$$

On désigne par

$$(201) \quad \rho_u = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_u}$$

une matrice carrée symétrique dont les éléments b, c sont

$$(202) \quad P_{bc,u} = P_{cb,u} = \frac{\partial^3 W'_m}{\partial q_u \partial i_b \partial i_c}$$

Cette matrice traduit l'influence des saillances magnétiques du système et, dans le cas général, tous ses éléments peuvent être non nuls :

$$(203) \quad \rho_u = \begin{array}{|c|c|} \hline \frac{\partial L_{11}}{\partial q_u} & \frac{\partial L_{12}}{\partial q_u} \text{ ---} \\ \hline \frac{\partial L_{21}}{\partial q_u} & \frac{\partial L_{22}}{\partial q_u} \text{ ---} \\ \hline \vdots & \vdots \\ \hline \end{array}$$

Les matrices carrées

$$(204) \quad \mathcal{H}_{(au)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{(au)}}$$

traduisent la dépendance des coefficients d'induction par rapport aux coordonnées $q_{(au)}$.

Les éléments bc de ces matrices sont

$$(205) \quad H_{bc, (au)} = H_{cb, (au)} = \frac{\partial^3 W'_m}{\partial q_{(au)} \partial i_b \partial i_c}$$

Il s'agit de matrices symétriques, avec une seule ligne et une seule colonne :

$$(206) \quad \mathcal{H}_{(au)} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \begin{array}{c} \text{O} \end{array} & \frac{\partial L_{1a}}{\partial q_{(au)}} & \begin{array}{c} \text{O} \end{array} \\ \hline \frac{\partial L_{a1}}{\partial q_{(au)}} & \frac{\partial L_{aa}}{\partial q_{(au)}} & \frac{\partial L_{ap}}{\partial q_{(au)}} \\ \hline \begin{array}{c} \text{O} \end{array} & \frac{\partial L_{pa}}{\partial q_{(au)}} & \begin{array}{c} \text{O} \end{array} \\ \hline \end{array}$$

Considérons maintenant le système d'équations qui définit les tensions v'''_a :

$$(207) \quad \begin{aligned} v'''_1 &= \sum_u \left(\frac{1}{2} \frac{\partial L_{11}}{\partial q_{(1u)}} i_1 + \frac{\partial L_{12}}{\partial q_{(1u)}} i_2 + \dots + \frac{\partial L_{1p}}{\partial q_{(1u)}} i_p \right) (\dot{q}_u - \dot{q}_{(1u)}) \\ v'''_2 &= \sum_u \left(\frac{\partial L_{21}}{\partial q_{(2u)}} i_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial L_{22}}{\partial q_{(2u)}} i_2 + \dots + \frac{\partial L_{2p}}{\partial q_{(2u)}} i_p \right) (\dot{q}_u - \dot{q}_{(2u)}) \\ &\dots \dots \dots \\ v'''_p &= \sum_u \left(\frac{\partial L_{p1}}{\partial q_{(pu)}} i_1 + \frac{\partial L_{p2}}{\partial q_{(pu)}} i_2 + \dots + \frac{1}{2} \frac{\partial L_{pp}}{\partial q_{(pu)}} i_p \right) (\dot{q}_u - \dot{q}_{(pu)}) \end{aligned}$$

Ces équations peuvent s'écrire sous forme matricielle comme suit

$$(208) \quad V''' = \sum_{u, a} G_{(au)}^T (\dot{q}_u - \dot{q}_{(au)})$$

On désigne par $G_{(au)}$ une matrice carrée asymétrique dont les éléments bc sont

$$(209) \quad G_{bc, (au)} = \delta_a^b \frac{\partial}{\partial i_c} \left(\frac{1}{i_a} \frac{\partial W'_m}{\partial q_{(au)}} \right)$$

Puisque $\frac{\partial W'_m}{\partial q_{(au)}}$ tend vers zéro au moins avec i_a la définition de la matrice est générale.

La matrice $G_{(au)}$ possède une seule ligne d'éléments non nuls. Celle correspondant à la coordonnée $q_{(au)}$ s'écrit :

$$(210) \quad G_{(au)} = \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \frac{\partial L_{a1}}{\partial q_{(au)}} \quad \dots \quad \frac{1}{2} \quad \frac{\partial L_{aa}}{\partial q_{(au)}} \quad \dots \quad \frac{\partial L_{ap}}{\partial q_{(au)}} \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

Cette matrice traduit l'effet du glissement dans les circuits à contacts glissants.

Une comparaison avec (206) montre que

$$(211) \quad \mathcal{H}_{(au)} = G_{(au)} + G_{(au)}^T$$

où $G_{(au)}^T$ désigne la matrice transposée de $G_{(au)}$.

Ce résultat peut être interprété facilement.

Pour cela, comparons un circuit déformable et un circuit à contacts glissants (Fig. 9).

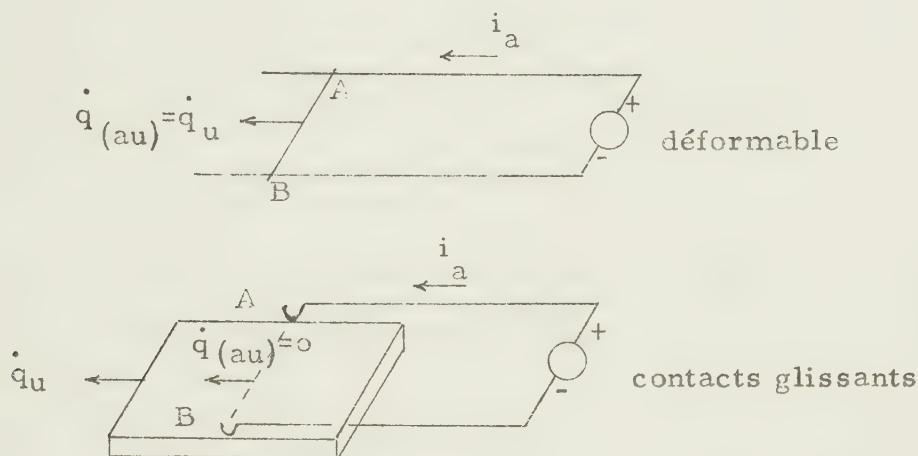


Fig. 9

Supposons le courant i_a constant.

D'après Dubois [24] la f. e. m. de self-induction dans le circuit filiforme contient deux termes. Avec nos notations, elle s'écrit

$$(212) \quad \mathcal{E}_{aa} = - \frac{d\psi_{aa}}{dt} = - \left(\frac{1}{2} i_a \frac{\partial L_{aa}}{\partial q_{(au)}} \dot{q}_{(au)} + \frac{1}{2} i_a \frac{\partial L_{aa}}{\partial \dot{q}_{(au)}} \ddot{q}_{(au)} \right)$$

où $\dot{q}_{(au)} = \dot{q}_u$.

Le premier terme est dû au flux balayé par le conducteur AB, dans un champ magnétique constant : on l'appellera f. e. m. motionnelle d'induction magnétique, en adoptant les désignations de Dubois.

Le deuxième est dû à une variation du champ magnétique en chaque point de l'espace, produite par le déplacement du tube de courant AB : on l'appellera une f. e. m. motionnelle d'induction électrique.

Dans le circuit à contacts glissants, il y a un seul terme, celui d'induction magnétique, et la f. e. m. est :

$$(213) \quad \mathcal{E}_{aa} = - \frac{1}{2} i_a \frac{\partial L_{aa}}{\partial q_{(au)}} \dot{q}_u$$

Le deuxième terme a disparu puisque le tube de courant est fixe dans l'espace.

Ce résultat explique le rapport entre les éléments aa des matrices $\mathcal{H}_{(au)}$ et $\mathcal{G}_{(au)}$:

$$(214) \quad G_{aa, (au)} = \frac{1}{2} H_{aa, (au)}$$

Considérons maintenant le phénomène d'induction mutuelle avec un circuit b , qu'on suppose fixe et parcouru par un courant constant.

La f.e.m. induite par b en a est associée au flux balayé par le circuit a ; qui est le même pour le circuit déformable et pour le circuit à contacts glissants. Alors

$$(215) \quad H_{ab, (au)} = G_{ab, (au)} \quad b \neq a$$

Par contre, l'action du circuit a sur le circuit b est due à un phénomène d'induction électrique qui n'existe que dans le circuit déformable. Alors

$$(216) \quad \begin{aligned} G_{ba, (au)} &= 0 & b \neq a \\ H_{ba, (au)} &= H_{ab, (au)} \end{aligned}$$

L'équation électrique matricielle peut s'écrire en fonction des matrices précédentes. Si on désigne par V la matrice des tensions appliquées on a :

$$(217) \quad \begin{aligned} V &= R\mathcal{I} + L \frac{d\mathcal{I}}{dt} + \sum_u \mathcal{P}_u \mathcal{I} \dot{q}_u + \\ &+ \sum_{u, a} \mathcal{H}_{(au)} \mathcal{I} \dot{q}_{(au)} + \sum_{u, a} \mathcal{G}_{(au)} \mathcal{I} (\dot{q}_u - \dot{q}_{(au)}) \end{aligned}$$

Si on veut mettre en évidence la f.e.m. associée au flux balayé on peut aussi écrire

$$(218) \quad \mathcal{V} = \mathcal{R} \mathcal{J} + \mathcal{L} \frac{d\mathcal{J}}{dt} + \sum_u \rho_u \mathcal{J} \dot{q}_u + \\ + \sum_{u,a} \mathcal{G}_{(au)t} \mathcal{J} \dot{q}_{(au)} + \sum_{u,a} \mathcal{G}_{(au)} \mathcal{J} \dot{q}_u$$

Ces équations sont générales pour les machines linéaires.

La force électromagnétique $(Q_u)_{em}$ selon une coordonnée q_u peut aussi être écrite sous forme matricielle.

La coénergie magnétique est

$$(219) \quad W'_m = \frac{1}{2} \mathcal{J}_t \mathcal{L} \mathcal{J}$$

en désignant par $\mathcal{J}_t$ la matrice transposée des courants.

On aura alors d'après l'équation (196)

$$(220) \quad (Q_u)_{em} = \frac{1}{2} \mathcal{J}_t \rho_u \mathcal{J} + \frac{1}{2} \sum_a \mathcal{J}_t \mathcal{H}_{(au)} \mathcal{J}$$

La force électrodynamique exercée sur les circuits électriques peut s'exprimer en fonction des matrices $\mathcal{G}_{(au)}$ au lieu de $\mathcal{H}_{(au)}$.

En effet, puisque le produit est un scalaire

$$(221) \quad \mathcal{J}_t \mathcal{G}_{(au)} \mathcal{J} = (\mathcal{J}_t \mathcal{G}_{(au)} \mathcal{J})_t = \mathcal{J}_t \mathcal{G}_{(au)t} \mathcal{J}$$

alors

$$(222) \quad \frac{1}{2} \sum_a \mathcal{J}_t \mathcal{H}_{(au)} \mathcal{J} = \sum_a \mathcal{J}_t \mathcal{G}_{(au)} \mathcal{J}$$

qui constitue une expression commode dans le cas des circuits à contacts glissants.

Les circuits à commutation électronique modernes permettent d'envisager un grand nombre de systèmes complexes, pour lesquels on aura besoin des équations générales précédentes.

Par contre, ces équations se simplifient beaucoup dans le cas des machines électriques classiques.

On a alors seulement deux éléments mécaniques dont un(stator) est au repos dans le référentiel de l'observateur. L'élément mobile (rotor) est repéré par une seule coordonnée mécanique, qui est un angle de rotation θ_r .

Les circuits à commutation sont disposés sur le rotor et toutes les paires de balais sont animées d'une vitesse de rotation commune $\dot{\phi}_r$.

Si $\mathcal{H}_{(br)}$ et $\mathcal{G}_{(br)}$ sont les matrices concernant les circuits rotoriques, on peut définir les matrices

$$(223) \quad \mathcal{H}_r = \sum_b \mathcal{H}_{(br)}$$

$$(224) \quad \mathcal{G}_r = \sum_b \mathcal{G}_{(br)}$$

Les équations matricielles s'écrivent alors

$$(225) \quad \mathcal{V} = R\mathcal{J} + \mathcal{L} \frac{d\mathcal{J}}{dt} + \mathcal{P}_r \mathcal{J} \dot{\theta}_r + \mathcal{H}_r \mathcal{J} \dot{\phi}_r + \mathcal{G}_r \mathcal{J} (\dot{\theta}_r - \dot{\phi}_r)$$

$$(226) \quad (\Omega_r)_{em} = \frac{1}{2} \mathcal{J}_t (\mathcal{P}_r + \mathcal{H}_r) \mathcal{J} = \mathcal{J}_t \left(\frac{\mathcal{P}_r}{2} + \mathcal{G}_r \right)$$

La matrice $\mathcal{H}_r$ peut être calculée directement par

$$(227) \quad \mathcal{H}_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho_r}$$

sans qu'il soit nécessaire de séparer les variables $q_{(br)}$.

Par contre, le calcul de la matrice $\mathcal{G}_r$ exige toujours la séparation de ces variables.

Dans les machines classiques les circuits à commutation sont disposés sur des armatures lisses. Le terme de saillance n'existe que dans certains rotors à circuit filiformes, comme celui des machines synchrones.

On a alors, pour ces derniers rotors

$$(228) \quad \dot{\theta}_r = \dot{\rho}_r$$

et nous avons intérêt à éliminer la variable ρ_r en introduisant une seule variable

$$(229) \quad \theta = \theta_r$$

telle que

$$(230) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_r} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho_r} = \mathcal{P}_r + \mathcal{H}_r$$

L'équation électrique devient alors

$$(231) \quad \mathcal{V} = R\mathcal{I} + \mathcal{L} \frac{d\mathcal{I}}{dt} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \mathcal{I} \dot{\theta}$$

et l'équation mécanique

$$(232) \quad Q_{\theta m} = \frac{1}{2} \mathcal{I}_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \mathcal{I}$$

qui sont des équations classiques.

Lorsque le rotor est à commutation, $\mathcal{P}_r = 0$ et on a

$$(233) \quad \mathcal{V} = R\mathcal{I} + \mathcal{L} \frac{d\mathcal{I}}{dt} + \mathcal{H}_r \mathcal{I} \dot{\rho}_r + \mathcal{G}_r \mathcal{I} (\dot{\theta}_r - \dot{\rho}_r)$$

$$(234) \quad Q_r = \mathcal{I}_t \mathcal{G}_r \mathcal{I} = \frac{1}{2} \mathcal{I}_t \mathcal{H}_r \mathcal{I}$$

Les équations précédentes sont celles que nous pourrions utiliser le plus couramment.

Ce sont des équations non-linéaires dont l'intégration exige en général l'utilisation de calculatrices.

Pourtant, dans beaucoup de problèmes, il est possible de linéariser les équations, soit par la technique des petits mouvements, soit en admettant que les vitesses $\dot{\theta}_r$, $\dot{\rho}_r$ sont connues en fonction du temps, normalement constantes.

Pourtant, les équations ne sont encore pas intégrables en général, puisque la matrice $\mathcal{L}$ étant fonction des coordonnées θ_r , ρ_r les équations sont à coefficients variables.

Les équations deviennent facilement intégrables dans un cas particulier, important : il s'agit des machines que nous appellerons, avec le Professeur GUDEFIN [25] machines à conversion continue d'énergie.

Dans ces machines, l'énergie magnétique reste constante, en régime permanent : toute la puissance électrique est alors continuellement convertie en puissance mécanique.

Il y a un premier type de machines qui sont, intrinsèquement, des machines à conversion continue d'énergie : il s'agit des machines à contacts glissants avec les balais fixes. Le fonctionnement de ces machines n'est pas associé à une variation d'énergie magnétique du système. Les coefficients d'induction sont alors constants et les équations de fonctionnement s'intègrent facilement.

Un deuxième type de machines à conversion continue d'énergie ce sont les machines polyphasées en régime sinusoïdal. On peut alors par des transformations convenables qui laissent constante l'énergie magnétique du système, définir une machine à commutation équivalente à la machine polyphasée et dont les équations sont intégrales.

La définition de cette machine équivalente a été parfois controversée, dans la mesure où elle paraissait physiquement irréalisable. Nous allons voir qu'il n'en est rien, et qu'on peut concevoir assez facilement cette machine.

Considérons une machine diphasée symétrique à pôles saillants. Désignons par 1, 2 les circuits du stator supposé saillant et par 3, 4 ceux du côté rotor lisse.

Avec les hypothèses de calcul habituelles [23], on peut établir la matrice d'inductance de cette machine.

$$L = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline L_{ds} & 0 & M_d \cos \rho_3 & M_d \cos \rho_4 \\ \hline 0 & L_{qs} & M_q \sin \rho_3 & M_q \sin \rho_4 \\ \hline M_d \cos \rho_3 & M_q \sin \rho_3 & L_{dr} \cos^2 \rho_3 + L_{qr} \sin^2 \rho_3 & L_{dr} \cos \rho_3 \cos \rho_4 + L_{qr} \sin \rho_3 \sin \rho_4 \\ \hline M_d \cos \rho_4 & M_q \sin \rho_4 & L_{dr} \cos \rho_3 \cos \rho_4 + L_{qr} \sin \rho_3 \sin \rho_4 & L_{dr} \cos^2 \rho_4 + L_{qr} \sin^2 \rho_4 \\ \hline \end{array}$$

avec la condition supplémentaire

$$\rho_r = \rho_3 = \rho_4 - \frac{\pi}{2}$$

D'après les définitions données, la matrice G_r peut être obtenue directement. On a

$$G_r = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -M_d \sin \rho_3 & M_q \cos \rho_3 & \frac{L_{qr} - L_{dr}}{2} \sin 2 \rho_3 & -L_{dr} \sin \rho_3 \cos \rho_4 + L_{qr} \cos \rho_3 \sin \rho_4 \\ \hline -M_d \sin \rho_4 & M_q \cos \rho_4 & -L_{dr} \cos \rho_3 \sin \rho_4 + L_{qr} \sin \rho_3 \cos \rho_4 & \frac{L_{qr} - L_{dr}}{2} \sin 2 \rho_4 \\ \hline \end{array}$$

Les matrices $\mathcal{L}'$ et $\mathcal{G}'_r$ de la machine à commutation équivalente sont obtenues à partir de la transformation de Park.

On a

$$\mathcal{L}' = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline L_{ds} & 0 & M_d & 0 \\ \hline 0 & L_{qs} & 0 & M_q \\ \hline M_d & 0 & L_{dr} & 0 \\ \hline 0 & M_q & 0 & L_{qr} \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & M_q & 0 & L_{qr} \\ \hline -M_d & 0 & -L_{dr} & 0 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Les résultats obtenus montrent que les matrices $\mathcal{L}'$ et $\mathcal{G}'_r$ coïncident avec les matrices $\mathcal{L}$ et $\mathcal{G}_r$ pour les valeurs.

$$\rho_r = \rho_3 = \rho_2 - \frac{\pi}{2} = 0$$

Alors le circuit à commutation cherché doit coïncider avec le circuit filiforme pour $\rho_r = 0$.

Pour imaginer ce circuit équivalent, on considère un système de conducteurs filiformes isolés disposés de façon à former une couronne cylindrique (Fig. 10)

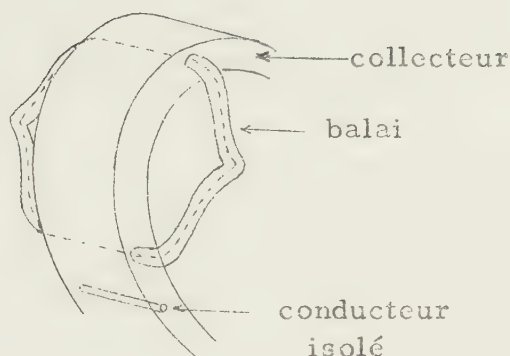


Fig. 10

Si sur les deux surfaces collectrices nous réalisons un système de contacts mécaniques ou électroniques convenable, on peut obtenir un système à commutation continue dont la configuration coïncide avec celle de la machine originale (Fig. 10).

Une telle possibilité n'existe pas si on se limite aux enroulements à commutation fermés, qui possèdent une distribution triangulaire de f. m. m.

White et Woodson [26] s'en sont rendu compte et proposent un modèle à commutation continue, mais ce modèle ne reproduit pas la distribution de courants du système original.

La théorie classique des machines électriques n'était en mesure de calculer la matrice G_r que dans le cas, justement analysé, où la distribution de f. m. m. de l'enroulement à commutation est sinusoïdale. Lorsqu'il s'agissait d'enroulements à commutation "non sinusoïdaux" qui sont les plus courants, la théorie classique avait besoin de faire un développement en série de Fourier de la distribution de courant dans l'induit : chaque harmonique était alors analysée par la transformation de Park et les équations finales de mouvement obtenues en imposant entre les différentes harmoniques des conditions de liaison convenables [26] .

La connaissance de la forme générale des matrices $G_{(au)}$ évite dorénavant ce travail.

2 - TRANSFORMATION DE RESEAUX. =====

Nous allons vérifier qu'on peut appliquer aux systèmes électromécaniques contenant des circuits à contacts glissants les méthodes de transformation de réseaux primitifs couramment utilisées.

Nous montrons aussi comment ces méthodes se déduisent et s'interprètent à partir des techniques analytiques vues dans ce travail.

Supposons que les liaisons électriques et mécaniques du réseau se traduisent par des relations de la forme

$$(235) \quad \sum_j A_{yj} dq_j + A_{y0} dt = 0 \quad y = 1, \dots, s$$

où les coefficients A_{yj} sont constants.

En reprenant des techniques déjà utilisées, représentons par $[C_{k'j}]$ la matrice non singulière de transformation correspondant aux liaisons (235) et $[C_{jk}]$ son inverse.

Si on multiplie les équations (189) par les $C_{jk'}$ et qu'on somme en j on obtient

$$(236) \quad \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n C_{jk'} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \sum_{j=1}^n C_{jk'} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \right)_j + \sum_{j=1}^n C_{jk'} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{j=1}^n C_{jk'} Q_j$$

$$K' = 1, \dots, n-s$$

Les forces de liaison disparaissent selon les coordonnées $q_{k'}$ pour des raisons déjà analysées.

Les équations de système électromécanique sont généralement des équations non-linéaires même s'il n'y a pas de saturation.

Il y a des cas importants où les équations peuvent devenir linéaires en particulier, lorsqu'on impose des vitesses mécaniques constantes.

Si on désigne par q_a les p coordonnées électriques et par q_u les $n-p$ coordonnées mécaniques, on a alors $n-p$ conditions (235) où

$$(237) \quad A_{yj} = \delta_j^y \quad y = s-n+p, \dots, s$$

La matrice de transformation est alors de la forme

$$(238) \quad [C_{k'j}] = \begin{array}{|c|c|} \hline [C_{b'a}] & \\ \hline & U \\ \hline \end{array}$$

où on désigne par U la matrice unité.

Dans ce cas, les équations correspondantes aux coordonnées électriques q_b , sont linéaires, et s'écrivent pour les $n-s$ premières.

$$(239) \quad \frac{d}{dt} \sum_{a=1}^P C_{ab'} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} - \sum_{a=1}^P C_{ab'} \frac{\partial L}{(\partial q)_a} + \sum_{a=1}^P C_{ab'} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_a} = \sum_{a=1}^P C_{ab'} Q_a$$

$$b' = 1, \dots, n-s$$

où $C_{ab'}$ représente les éléments de la matrice inverse de $C_{b'a}$.

Admettons que les équations (239) puissent s'écrire sous forme opérationnelle

$$(240) \quad \sum_{a=1}^P \sum_{c=1}^P C_{ab'} W_{ac} \dot{q}_c = \sum_{a=1}^P C_{ab'} Q_a$$

$$b' = 1, \dots, n-s$$

où W_{ac} représente, selon l'analogie adoptée, l'impédance ou l'admittance opérationnelle.

L'équation (240) est équivalente à la méthode de transformation de réseaux primitifs de Kron.

En effet, si on utilise (235) pour exprimer les $\dot{q}_c$ dans les $\dot{q}_a$, on obtient

$$(241) \quad \sum_{c=1}^p \sum_{a=1}^p \sum_{a'=1}^p C_{ab'} W_{ac} C_{ca'} \dot{q}_{a'} = \sum_{a=1}^p C_{ab'} Q_a$$

$$b' = 1, \dots, n-s$$

soit

$$(242) \quad \sum_{a'=1}^p W_{b'a'} \dot{q}_{a'} = Q_{b'}$$

$$b' = 1, \dots, n-s$$

Dans le cas particulier où les liaisons électriques sont indépendantes du temps, la transformation $[C_{ab}]$ prend l'aspect

$$(243) \quad \begin{array}{|c|} \hline \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_p \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \overbrace{\hspace{1cm}}^{n-s} & \overbrace{\hspace{1cm}}^{s-n+p} \\ \hline \mathcal{C}_1 & \mathcal{C}_0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \dot{q}_1' \\ \vdots \\ \dot{q}_{(n-s)'} \\ \hline \begin{array}{c} o \\ \vdots \\ o \end{array} \\ \hline \end{array}$$

On peut alors faire, dans l'équation (241);

$$a' = 1, \dots, n-s$$

La matrice dont les éléments sont $w_{b'a'}$ devient alors

$$(244) \quad [W_{b'a'}] = \mathcal{C}_{1t} [W_{ab}] \mathcal{C}_1$$

La matrice des vitesses $\dot{q}_{a'}$ ($a' = 1, \dots, n-s$) est alors reliée à la matrice des vitesses $\dot{q}_a$ ($a=1, \dots, p$) par

$$(245) \quad [\dot{q}_a] = \mathcal{C}_1 [\dot{q}_{a'}]$$

et les matrices des forces $Q_{a'}$ et Q_a par

$$(246) \quad \begin{bmatrix} Q_{a'} \end{bmatrix} = \mathcal{L}_{1t} \begin{bmatrix} Q_a \end{bmatrix}$$

On retrouve dans les équations précédentes les relations fondamentales de la méthode des réseaux primitifs, lorsqu'il n'y a pas de liaisons dépendant du temps, c'est à dire de courants de noeuds dans l'analogie de Maxwell et de générateurs de branche dans l'analogie de Darrieus.

L'étude précédente montre que l'existence d'éléments à contacts glissants n'affecte pas la validité des méthodes classiques de transformation de réseaux.

Elle montre encore l'unité formelle qu'il y a entre ces méthodes et les méthodes que nous avons utilisées pour étudier les liaisons électromécaniques.

3 - ASSERVISSEMENT DU FACTEUR DE PUISSANCE D'UN MOTEUR SYNCHRONE.

Le fonctionnement d'un moteur synchrone avec excitation fixe est satisfaisant si la charge reste constante ou peu variable.

Pourtant, si la charge est fortement variable il est difficile de choisir une valeur convenable du courant d'excitation.

Une forte excitation peut assurer un couple maximal élevé et un bon facteur de puissance à pleine charge, mais conduit à des facteurs de puissance très petits pour les charges faibles. La courbe a) de la Fig.11 obtenue expérimentalement sur une machine de 10 KVA correspond à ce cas.

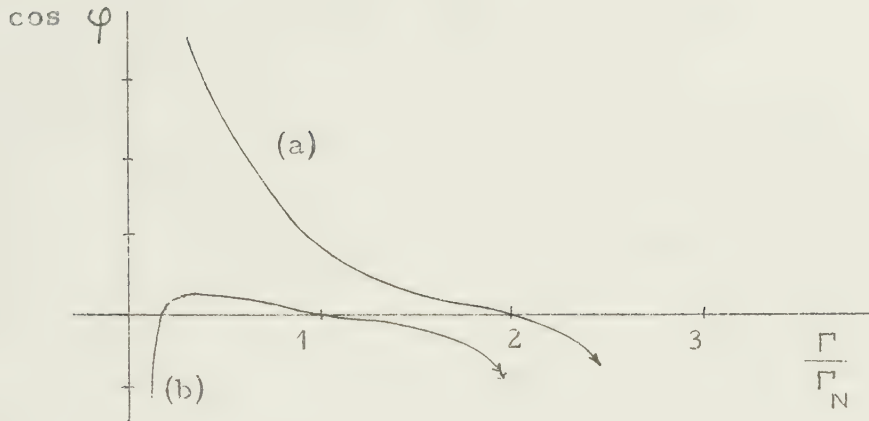


Fig. 11

Par contre, une faible excitation, capable d'assurer un bon facteur de puissance aux faibles charges, risque de trop réduire le couple maximal du moteur avec danger de perte de stabilité au moindre coup de charge (courbe b- Fig. 1).

On peut ainsi être amené à contrôler l'excitation du moteur. Ce contrôle peut être fait de façon que le facteur de puissance reste constant et c'est le cas que nous avons étudié.

De ce contrôle peut résulter un meilleur rendement du moteur et aussi la possibilité de réduire la puissance de celui-ci.

Si on désigne par φ l'angle de phase, la condition de liaison que nous voulons imposer au système est

$$(247) \quad \varphi = \varphi_c$$

L'angle de phase ne constitue pas une variable dynamique du système. Alors, la condition (247) doit se traduire par certaines conditions de liaison entre les variables dynamiques du système.

Dans le cas étudié, ces conditions reviennent à asservir convenablement le courant d'excitation i_f aux autres variables du système :

$$(248) \quad i_f = i_f(i_a, i_b, i_c, \theta)$$

où on désigne par i_a , i_b , i_c les courants d'induit et par θ l'angle de position du rotor.

Le système d'asservissement exercera des forces de liaison sur le circuit inducteur, d'une part, et sur le reste du système d'autre part. C'est le travail de ces forces de liaison qui doit nous assurer la condition (247).

La puissance d'excitation d'une machine synchrone est petite, comparée à la puissance convertie. Alors, même si on admet l'hypothèse la plus défavorable où tout le travail des forces de liaison sur l'inducteur provient des autres forces de liaison sur le système, on peut négliger le travail de ces dernières face au travail des forces appliquées.

Ainsi la condition de travail virtuel nul des forces de liaison peut s'écrire approximativement

$$(249) \quad \delta q_f = 0$$

où $q_f = \int i_f dt$, pour un système d'asservissement convenablement choisis

La condition (249) permet de définir les équations lagrangiennes de mouvement.

L'équation selon q_f sera remplacée par la condition de liaison (248) et les équations lagrangiennes à retenir sont seulement les équations électriques d'induit et l'équation mécanique.

Il s'agit d'une conclusion qu'on aurait pu établir intuitivement, mais il est intéressant de voir comment la théorie dynamique des liaisons d'asservissement permet de l'obtenir.

Les équations lagrangiennes deviennent, après transformation les équations classiques d'une machine synchrone

$$(250-a) \quad v_d = R i_d + \frac{d\psi_d}{dt} - \omega \psi_q$$

$$(250-b) \quad v_q = R i_q + \frac{d\psi_q}{dt} + \omega \psi_d$$

$$(250-c) \quad \Gamma = \alpha \dot{\theta} + p(\psi_d i_q - \psi_q i_d) + J \ddot{\theta}$$

où on représente par d les grandeurs selon l'axe longitudinal et par q celles selon l'axe transversal.

Les équations (250) et la condition de liaison (248) déterminent le fonctionnement du système.

La condition (248) ne sera équivalente à la relation d'asservissement (247) que pour le régime permanent du moteur. En effet, nous étudions un type spécial d'asservissement qui ne concerne que certains régimes de fonctionnement.

Pour le régime permanent les équations électriques (250) s'écrivent en notation complexe

$$(251-a) \quad V = Z_q I e^{-j(\varphi - \xi_q)} + \left[\frac{X_{df}}{\sqrt{2}} i_f - I(X_d - X_q) \sin(\hat{\delta} + \varphi) \right] e^{j\hat{\delta}}$$

où Z_q est l'impédance synchrone transversale, ξ_q l'argument correspondant, $\hat{\delta}$ l'angle de puissance et X_d , X_q et X_{df} les réactances longitudinale, transversale et mutuelle.

Compte tenu du fait que

$$I = \frac{V \sin \hat{\delta}}{Z_q \sin(\varphi + \hat{\delta} - \xi_q)}$$

l'équation mécanique s'écrit

$$(251-b) \quad \Gamma - \alpha \dot{\theta} = \Gamma_{em} = p \frac{3V^2}{\omega Z_q} \frac{\sin \hat{\delta}}{\sin(\varphi + \hat{\delta} - \xi_q)} \left(\cos \varphi - \frac{\cos \xi_q \sin \hat{\delta}}{\sin(\varphi + \hat{\delta} - \xi_q)} \right)$$

en adoptant comme sens positif celui du fonctionnement en moteur.

La condition de liaison (248) s'établit maintenant compte tenu de l'équation (251-a).

Elle devient

$$(251-c) \quad i_f = \frac{\sqrt{2}}{X_{df}} \left\{ (X_d - X_q) I \sin(\varphi_c + \delta) + \left| V - Z_q I e^{-j(\varphi_c - \xi_q)} \right| \right\}$$

qui est enfin équivalente à la condition d'asservissement (247).

Les équations (251) constituent les équations du système asservi.

Plusieurs systèmes d'asservissement ont été utilisés pour assurer les conditions précédentes. Nous en avons proposé un qui est analysé en détail dans les références [27] .

CONCLUSION

Le modèle dynamique proposé présente comme caractéristique fondamentale la séparation initiale entre les coordonnées des systèmes mécanique et électrique. Une telle séparation n'avait pas été introduite auparavant, alors qu'elle s'impose pour l'étude des systèmes à contacts glissants.

La liaison entre les systèmes mécanique et électrique est alors étudiée par des méthodes de la dynamique analytique plus générales que celles habituellement proposées en mécanique, ce qui explique en partie les difficultés rencontrées dans l'étude dynamique de ces systèmes.

Une fois défini le modèle dynamique et les techniques analytiques une étude générale des systèmes électromécaniques devient possible.

Pour cette étude nous avons considéré successivement les circuits inductifs et les circuits capacitifs fondamentaux et nous avons montré comment le modèle dynamique s'étudie, soit à partir de l'analogie électromécanique de Maxwell, soit à partir de celle de Darrieus.

Les équations des circuits inductifs à contacts glissants, selon l'analogie de Maxwell, ont aussi été établies par Von der Embse [9] par une voie indépendante de la notre. Les autres équations obtenues dans ce travail sont à notre connaissance originales, ainsi que la méthode de liaisons qui permet de les établir.

Le modèle dynamique proposé permet encore d'établir une équation générale des systèmes électromécaniques à contacts glissants indépendante de l'analogie adoptée, ce qui, à notre connaissance n'avait encore pas été tenté

Les équations générales obtenues doivent s'appliquer à d'autres systèmes électromécaniques que ceux déjà considérés. Il suffit alors de reprendre l'étude du mode d'action des liaisons pour déterminer la forme particulière que prendront les équations de mouvement.

Les méthodes proposées possèdent l'avantage de s'intégrer directement dans une théorie dynamique des réseaux électromécaniques et des méthodes équivalentes sont déjà en fait utilisées en théorie des réseaux (méthode des réseaux primitifs de Kron).

Les difficultés connues pour la définition d'un modèle dynamique des systèmes électromécaniques, avaient conduit à développer directement une théorie matricielle des machines électriques, qui se heurtait elle aussi à des difficultés. La plupart des livres récents sur les machines électriques concernent cette théorie. Nous avons vérifié que les équations dynamiques obtenues permettent d'établir des équations matricielles beaucoup plus générales que celles proposées jusqu'à maintenant.

Dans ces dernières années plusieurs auteurs ont établi les équations de circuits à commutation en reprenant le point de vue de Poincaré. Pourtant les résultats obtenus ne dépassèrent guère ceux qu'on connaissait déjà dans la théorie matricielle des machines. Nous avons développé le point de vue de Poincaré et montré qu'il permet d'obtenir des équations générales des circuits à contacts glissants. L'étude ainsi effectuée permet de comprendre le rôle joué par les liaisons électromécaniques internes, ce qui est important pour l'analyse des machines à commutation électronique modernes.

Les machines à commutation électronique constituent précisément le domaine d'application le plus immédiat pour notre travail. Ces machines ont, jusqu'à maintenant, été étudiées sans tenir compte de leurs propriétés énergétique spécifiques et on peut espérer qu'une analyse plus systématique permettra de résoudre un certain nombre de problèmes qui se posent actuellement dans leur conception [28].

- BIBLIOGRAPHIE -

- 1 - MAXWELL : "Traité d'électricité et magnétisme -(trad. française)
Ed. Gauthier-Villars, 1885
- 2 - POINCARÉ : Etude du récepteur téléphonique, "L'éclairage électrique"
Fév. - Mars, 1907.
- 3 - M. DARRIEUS : Modèles mécaniques en électrotechnique,
"Bull. Soc. Franç. Elect." t. 9, 1929, p. 794-809.
- 4 - POINCARÉ : Sur l'induction unipolaire "L'éclairage électrique" t. 23,
1900, p. 41-53 ; sur les propriétés des anneaux à
commutation, "L'éclairage électrique", t. 30 , 1902
p. 77-81 et p. 301-310.
- 5 - POINCARÉ : Sur quelques théorèmes généraux relatifs à l'électrotechni-
que "L'éclairage électrique", t. 50, 1907, p. 293-301.
- 6 - M.S. GARRIDO et E. GUDEFIN : Les équations des machines à commu-
tation à balais fixes "C.R. Acad. Sci. (Paris)" t. 264
série B.
- 7 - M.S. GARRIDO : Les liaisons internes des machines électriques à
commutation, "Técnica", t. XXIX, p. 391-400
Mai 1967.
- 8 - K. KONDO et Y. ISHIZUKA : Geometrical aspects of Kron's non-
riemannian electrodynamics, "Memoirs of the unifying
study of the basic problems in engineering sciences
by means of geometry", Ed. Gakujutsu Bunken,
Fukyu-Kai, Tokyo, 1955.



- 9 - U.A. VON DER EMBSE : A new theory of electric machines,
"Trans I.E.E.E. (Power)", T. PAS-85, p. 945-951,
Septembre 1966 ;
A new theory of nonlinear commutator machines
"à paraître"
- 10 - E. CARVALLO : Sur l'application des équations de Lagrange aux
phénomènes électrodynamiques "C.R. Ac. Sci. (Paris)"
t; CXXXIII, 1901, p. 924.
"L'électricité déduite de l'expérience et ramenée au
principe des travaux virtuels," Col. Scientia,
Ed. C. Naud, 1902.
- 11 - APPELL : Aperçu sur l'emploi possible de l'énergie d'accélération
dans les équations de l'électrodynamique, "C.R. Ac.
Sci. (Paris)" t. 154, 1912. p. 1037-1040.
"Sur une forme générale des équations de la dynamique"
Memorial des sciences mathématiques, Ed.
Gauthier-Villars, 1925.
- 12 - H. BEGHIN : "Etude théorique des compas hydrostatiques Anschütz
et Sperry", thèse n° 1727, Paris, 1922.
- 13 - M.S. GARRIDO : La théorie dynamique des machines électriques,
"Técnica", t. XXIX, p. 331-354, Avril 1967.
- 14 - M.S. GARRIDO et E. GUDEFIN : Les équations générales des ma-
chines électriques "C.R. Ac. Sci. (Paris)", t; 264
série B, 1967, p. 1393-1396.

- 15 - M. S. GARRIDO : Eléments d'une théorie dynamique des machines électriques, "R.G.E.", t. 77; p. 27-33, Janv. 1968
- 16 - N. ROUCHE : Les équations de Lagrange des systèmes électromécaniques "R.G.E.", t. 75, p. 891-902, Juil. 1966.
- 17 - L. BRILLOUIN : "Les tenseurs en mécanique et en élasticité", Ed. Masson, 1949.
- 18 - C. CHERRY : Some general theorems for nonlinear systems possessing reactance, "Phil. Mag.", 7^e série t. 42 (1951) p. 1164-1177.
- 19 - E. T. WHITTAKER : "Analytical dynamics of particles and rigid bodies", Ed. Cambridge Univ. Press, 1965.
- 20 - H. GOLDSTEIN : "Mecanica clasica" (trad. espagnole) Ed. Agvilar, 1963.
- 21 - W. K. H. PANOFSKY et M. PHILLIPS : "Classical electricity and magnetism" Ed. Addison Wesley, 1962.
- 22 - A. DA SILVEIRA : "Teoria da electricidade", Université de Lisbonne 1948.
- 23 - M. S. GARRIDO : L'analyse matricielle des machines électriques "Técnica", vol. XXIX, p. 443-455, Juin 1967.
24. E. DUBOIS : "Electromagnetisme", Ed. Delagrave, 1953-59.
- 25 - E. GUDEFIN "Cours d'Electrotechnique" 3^eme année, E. N. S. E. M. Nancy, (non publié).

- 26 - D.C. WHITE et H.H. WOODSON : "Electromechanical energy conversion"
Ed. John Wiley, 1959
- 27 - I.R. SMITH et M.S. GARRIDO : Current - compounded self-excitation
circuits "Proc. IEE", vol.113, p. 1847-1848, Nov. 1966 ;
Current-compounded self-excitation of synchronous motors
"Proc. IEE", vol 114, p. 269-275, Fév. 1967.
Characteristics of a synchronous motor with current
compounded self-excitation (à paraitre).
- 28 - E. GUDEFIN : Les machines à commutation électronique "R. G. E.",
t, 77, p. 19-26, Janv. 1968.

DEUXIEME THESE

CONTROLE PAR COMPENSATION

-*-*-*-*-

Vu, Approuvé,
et Permis d'Imprimer

Nancy, le 13 Mai 1968 .

Le Doyen,

J. AUBRY.

